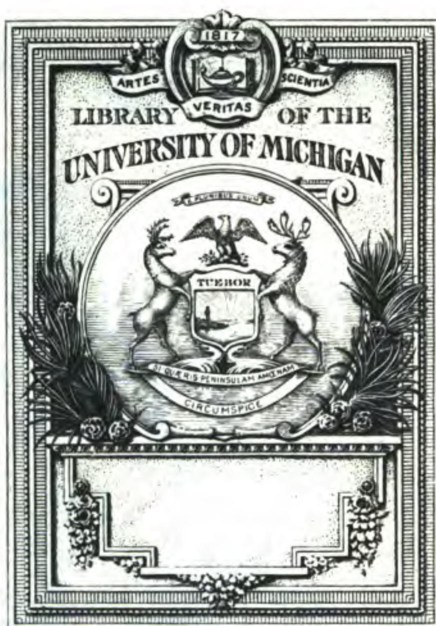

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

# De første Grunde af den rene Mathematik.

## Forsøg til en Lærebog for Skoler

ved

Hans Christian Linderup.

## Tvende Deel.

Anden, ved flere betydelige Forandringer og Tillæg forbedrede, og med en kort Afhandling om de krumme Linier, der almindelig kaldes Keglesnitte, forøgede Udgave.

Med 8 Kobbere.

Kiøbenhavn, 1807.
Trykt og forlagt af Directeur J. F. Schultz,
Kongelig og Universitets-Bogtrykker.

Den

# Kongelige Direction

for

## Universitetet og de lærde Skoler

tilegnes

denne forbedrede og forøgede Udgave

af

Forsøg til en Lærebog i den rene Mathematik

med den dybste Ærefrygt, største Agtelse og sandeste Taknemmelighed

underdanigst og ærbødigst

af

Forfatteren.

# Første Deel.

# Forerindrig til første Udgave.



Her følger Slutningen eller anden Deel af det Forsøg til en Lærebog, hvoraf omtrent det Halve eller første Deel udkom i Aaret 1799. For dette lange Ophold beder jeg om mine Læseres Tilgivelse. Jeg kunde anføre mange baade vigtige og mindre vigtige Aarsager til dette Ophold; men jeg troer, bedre slet ingen at anføre, og i det Sted bede om en gunstig Modtagelse for min Bog, nu da den endelig kommer, at den ikke endnu skulde komme for tidlig.

Angaaende Planen, jeg har fulgt til at udarbeide dette Forsøg, tillades det mig blot at giøre opmærksom paa Følgende: Jeg har fremsat de forskiellige enkelte Stykker eller Dele af Videnskaben i den Orden, som jeg efter min Overbeviisning troer at de bør foredrages, uden derfor at paastaae, at det er

den

den bedste. Enhver Lærer kan derfor efter eget Skiønnende forandre denne Orden, uden at Bogen derfor bliver mindre brugbar. At undersøge nøie og med Grunde godtgiøre, hvorfor jeg troer, at den af mig i nærværende Bog fulgte Orden i Materiernes Fremsættelse ogsaa er den, som jeg anseer for rigtigst at følge ved Underviisningen, vilde lede mig videre, end de her foreskrevne Grændser tillade; jeg vil derfor opsætte denne Undersøgelse til en anden Tid og paa et andet Sted.

Om Udarbeidelsen selv har jeg intet videre at sige, end at jeg derpaa har anvendt al muelig Flid, og at de fleste Afsnit ere flere Gange omarbeidede. Jeg har giennemlæst de fleste mig bekiendte Skrifter i samme Materie og benyttet mig deraf. Læseren vil vel ikke her forefinde noget egentlig Nyt, og det er nok neppe at vente i en Bog af den Art; dog haaber jeg, at enhver upartisk Læser vil finde, at jeg ikke blindt hen har fulgt Nogen, men selv nøie giennemtænkt og prøvet Alt, for at fremsætte det med muligste Orden og Tydelighed; og hvis dette kun nogenledes er lykkedes mig, troer jeg ikke denne lille Bog overflødig.

I Henseende til Bogens Indhold, da har min Hensigt været, at den skulde indfatte det af den rene Mathematik, som foredrages i de forandrede lærde Skoler efter den for disse Skoler allernaadigst approberede Plan. For disse Skoler, hvor den efter Skole-Commissionens Forslag er indført, er den især skrevet; dog troer jeg, at den kan bruges i ethvert Institut og ved enhver Underviisning. Ligesom det og har været mig en ikke ringe Opmuntring at erfare, at den første Deel allerede mange Steder er brugt.

Da begge Dele beqvemt kan indbindes samlede, som jeg og ønskede for Kobbernes Skyld, da nogle faa Figurer paa de Kobbere i første Deel høre til Sætninger, der forekomme først i anden, og omvendt (en Feil, som bedes undskyldt, og som er foraarsaget af Textens oftere Omarbeidelse efterat Pladerne vare stukne), saa har Forlæggeren, efter min Anmodning, besørget forskiellige Titelblade, nemlig baade til begge Dele under eet og til anden Deel for sig selv.

At her intet findes om Keglesnittene og den sphæriske Trigonometrie, er, fordi jeg ikke er ganske

enig med mig selv, hvorvidt disse Dele af Mathematiken bør foredrages i de lærde Skoler; og jeg vilde, at min Bog intet Andet skulde indeholde, end hvad der bør læses. Imidlertid er en Afhandling om Keglesnittene allerede trykt og Pladerne stukne; dertil skal jeg føie de første Grunde af den sphæriske Trigonometrie, da dette, der vil udgiøre 5 à 6 Ark, kan ansees som et Supplement eller Anhang til Bogen, hvori jeg muueligt tillige kan faae Leilighed at anføre en eller anden Rettelse eller Tillæg til det i Bogen selv Foredragne.

Jeg har nu intet videre at tillægge, uden at anbefale min Bog til Læsernes gunstige Dom.

Kiøbenhavn, d. 7 Septbr. 1803.

Forfatteren.



## Forerindring til anden Udgave.

Efter Forelæggerens Hr. Directeur Schulz's Anmodning har jeg besørget denne anden Udgave af min mathematiske Lærebog, og deri anbragt flere ikke ubetydelige Forandringer, Rettelser og Tillæg, som jeg efter min senere Erfaring troede deels passende, deels nødvendige. At opregne disse Forandringer anseer jeg for overflødigt, da enhver opmærksom Læser let selv opdager dem. Ligeledes har jeg tilføiet en kort Afhandling om de krumme Linier, som almindelig faae Navn af Keglesnitte. Jeg har anvendt al Flid paa at giøre denne Udgave, ved de Tillæg den har faaet, saa fuldkommen som det var mig mueligt. I Afhandlingen om Keglesnittene har jeg allene anført det, som jeg troede med Nytte kunde foredrages i de lærde Skoler; og vil ikke, at det paa nogen Maade skal ansees som nogen fuldstændig

dig

dig Afhandling derom, som jeg ikke troede passende i en Skolebog. Jeg har heller ikke tilføiet den sphæriske Trigonometrie, da den ikke læses i Skolerne. To nye Kobber-Tavler ere komne til, som indeholde Kobberne de krumme Linier vedkommende. Den værdige Forlægger skylder jeg offentlig Tak, baade for den Ædelmodighed, hvormed han under dette Arbeide har understøttet mig, da jeg ellers ikke skulde kunde bragt det til Ende; som og for at han intet har sparet for at give Bogen al den udvortes Fuldkommenhed som muligt. Jeg har nu intet videre at tilføie, end at bede den gunstige Læser, med Skaansel at bedømme denne forbedrede Udgave, og bære over med de Ufuldkommenheder, Bogen endnu maatte have, og som de just ikke gunstige Omstændigheder, under hvilke jeg har besørget den, let kan have foraarsaget.

Kiøbenhavn, den 30 Marz 1807.

Forfatteren.

---

Ind-

# Indhold.

## Første Deel.



III. Om

---

# Anden Deel.

## Videre Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.



## Om Aeqvationer eller Ligninger og deres Opløsning.



III. Om

## Geometrie. Anden Deel.

## Stereometrie eller Lære om Legemer.



V. Om

## Plan-Trigonometrie.



## Om de krumme Linier.

# Prolegomena eller Forerindring til Mathematiken.

## Om Mathematikens Gienstand, og dens forskiellige Deele.

### §. 1.

Størrelse (qvantitas) er den Egenskab ved en Ting, at den kan modtage Tilvæxt eller Aftagelse, v. en Bestemmelse, hvor ofte til en Tings Frembringelse en ligeartet Ting maae igientages.

Anmærkning. Ting ere ligeartede; (homogenea) naar de indbefattes under et fælles Begreb; Eftersom dette Begreb er forskielligt, kan de samme Ting være snart ligeartede, snart uligeartede.

En Størrelse (qvantum), kaldes enhver Ting hvori Størrelse (qvantitas) finder Sted. En hver Størrelse bestaaer derfor af ligeartede Deele; Ere disse ligeartede Deele saaledes forenede med hinanden, at hver den ene ophører, den anden den umiddelbar begynder, kaldes Størrelsen sam-

sammenhængende (qvantum continuum), f. Ex. Rum. Naar Deelene derimod ikke saaledes ere foreenede, er det en adskilt Størrelse (qvantum discretum) f. Ex. en Armee, et Bibliothek.

En sammenhængende Størrelse kan være enten extensiv (udstrakt) eller intensiv (Kraft-stor).

Extensiv, naar dens ligeartede Deele ere uden for hinanden, og opfylde forskiellige Rum, saa at dens Frembringelse ved deres Foreening er mulig, f. Ex. en Linie.

Intensiv, naar dens ligeartede Deele ikke ere uden for hinanden, og Størrelsen altsaa ikke ved deres Sammensætning kan tænkes frembragt, men maae betragtes som en Eenhed, f. Ex. Varme.

§. 2.

Tydelige Begreb om enhver Art af Størrelses, erholdes først ved Sandserne; dernæst ved at sammenligne en saaledes bekiendt Størrelse med en ligeartet ubekiendt; anstilles denne Sammenligning med adskilte Størrelser, kaldes den Tælning, og den bekiendte Størrelse en Eenhed; bestemmer man derimod paa denne Maade en ubekiendt Udstrækning, saa kaldes den bekiendte Størrelse, Maal eller Maalestok, og Sammenligningen en Udmaalning. De intensive Størrelser kan af Mangel paa en bekiendt Eenhed eller Maalestok

lestok ikke paa denne Maade bestemmes. Endog ved de adskilte og extensive Størrelser, lader denne umiddelbare Sammenligning sig ofte ikke foretage; man maae derfor vide ved Slutninger at bestemme en ubekiendt Størrelse ved Hielp af de ved Tælning og Maalning bekiendte, og til den Ende undersøge de bekiendte Størrelsers Forbindelse med den ubekiendte. Denne videnskabelige Kundskab om Størrelser, og deres Forbindelse kaldes Mathematik: den forudsætter den umiddelbare Tælning og Maalning, og lærer at bestemme ubekiendte Størrelser, der hvor disse ei kan anvendes, formedelst Slutninger og visse Opfindelses Methoder.

§. 3.

Enhver Størrelse kan betragtes blot som Størrelse, uden Hensyn til nogen virkelig existerende Ting v. affondret fra alle en Tings øvrige Egenskaber, og da kaldes den en abstract (ubenævnt, affondret) Størrelse; eller og med Hensyn til, eller som Egenskab hos en virkelig Ting, og da faaer den Navn af en concret (benævnt v. bestemt) Størrelse. Med hine allene har den reene Mathematik (Mathesis pura, theoretica) at giøre; med disse derimod den anvendte eller udøvende (Mathesis applicata v. practica).

§. 4.

De Størrelser som efter §. 2, ere Gienstanden for Mathematik ere alleene de adskilte og extensive; Den reene Mathematik har altsaa kun tvende Hoved-Deele. Arithmetik (Tall-Videnskab) handler om de adskilte Størrelser abstract betragtede. Geometrie (Maale-Videnskab v. Videnskab om Rum) om de sammenhængende extensive Størrelser. Dog henregnes i Almindelighed til den reene Mathematik, foruden de tvende nævnte Hoved-Deele, ogsaa Trigonometrie og de analytiske Videnskaber. Trigonometrien lærer af tre givne Stykker i en Triangel at finde de øvrige ved Beregning, og er enten plan som har plane retlinede Triangler til Gienstand eller sphærisk, hvis Gienstand ere sphæriske eller Kugel-Triangler. De analytiske Videnskaber (analysis) indeholde de almindelige Opfindelses Methoder for begge Hoved-Arter af Størrelser, saavel adskilte som sammenhængende.

§. 5.

Da saavel Geometrie som Arithmetik ere anvendelige paa alle sandselige Gienstander, saa vilde den heele materielle Verden blive Object for den anvendte Mathematik, og den maatte altsaa indeholde saa mange forskiellige Deele, som der gi-

ves

des forskiellige Ting i Naturen, hvis Størrelse lader sig bestemme. Men da det vilde være uhensigtsmæssig at henføre en saa unyttig Mængde af Deele til den anvendte Mathematik; især da den reene Mathematik uden videre Forklaring umiddelbar lader sig anvende paa mangfoldige sandselige Gienstænder; saa deeler man nu i Almindelighed de til den anvendte Mathematik-hørende Videnskaber i følgende 4 Hoved-Classer, nemlig: de Mekaniske, Optiske, Astronomiske og Architektoniske Videnskaber, og henregne dertil følgende Deele.

## I. De Mekaniske Videnskaber, om Lige-Vægt og Bevægelse, derunder hører

1) Statik ɔ: Videnskab om faste Legemers Ligevægt.
2) Mekanik, om faste Legemers Bevægelse
3) Hydrostatik, om Vandets Ligevægt og Tryk.
4) Hydraulik, om Vandets Bevægelse.
5) Aerometrie, om Luftens Ligevægt og Bevægelse.

## II. De Optiske Videnskaber, om Lyset, nemlig:

1) Optik, om Lys-Straaler, som fra Objectet i en ret Linie falde i Øiet.
2) Katoptrik, om tilbagekastede Lysstraaler.

3) Di-

3) Dioptrik, om brækkede Lysstraaler.

4) Perspectiv, om Objecternes Aftegning paa en Flade, saaledes som de i en given Afstand og Beliggenhed viser sig for Diet.

Hertil kunde endnu regnes Photometrie og Pyrometrie, om Lysets og Ildens Kraft; men disse Videnskaber ere endnu i deres Barndom og fortiene ikke Navn af Mathematiske Discipliner.

## III. De Astronomiske Videnskaber, om Himmel-Legemerne og Jorden; dertil regnes:

1) Astronomie, om Himmel-Legemernes Bevægelse, Størrelse og Afstand.

2) Geographie, om Jordens Figur og Størrelse, samt Stedernes Beliggenhed paa samme.

3) Chronologie, om Tids-Bestemmelsen ved Himmel-Legemernes Bevægelse.

4) Gnomonik, om Tids-Bestemmelsen, formedelst Soel, Maane og Stierne-Uhre.

## IV. De Arkitektoniske Videnskaber, hvortil hører:

1) Borgerlig Bygningskunst, om Bygningers Opførelse og beqvemme Indretning.

2) Skibs-Bygnings-Kunst, om Skibenes rette Dannelse, især under Vandet, at de paa beste Maade svare til deres Bestemmelse.

3) Artillerie-Videnskab, om Skyde-Gevæhrers og andre Vaabens Indretning, som bruges til Angreb og Forsvar.

4) Krigs-Bygnings-Kunst v. Fortification, om Fæstningsværkers Anlæg, samt hvorledes de angribes og forsvares.

De arkitektoniske Videnskaber ere imidlertiid ikke blot mathematiske; men udfordre foruden Mathematiske Kundskaber, som ere aldeles nødvendige, en Mangde andre Kundskaber, som ligge uden for Mathematikens Grændser.

§. 6.

Mathematik inddeles end videre i elementar (lavere) Mathematik og høiere (sublimior). Hiin indskrænker sig blot til de første Grund-Lærdomme, og har sin bestemte Grændse, denne begynder, hvor hiin ophører, og fortsætter sine Undersøgelser i det uendelige. I Henseende til Methode og Foredrag ere den elementare og høiere Mathematik fuldkommen forskiellige; da der i den elementare bestandig bruges den synthetiske Methode, (hvor man gaaer frem fra det enkelte til det sammensatte) og i den høiere den analytiske (hvor man gaaer tilbage

tage fra det sammensatte til det enkelte) og derved kan Grændse-Linien imellem disse Deele nøiagtigst bestemmes. Man kunde altsaa inddeele, 1) Arithmetik i den gemeene (lavere) som maatte indbefatte simpel Regning og Bogstav Regning, samt Ligningers Opløsning af 1ste og 2den Grad, og den høiere, som undersøger Naturen og Opløsningen af alle mulige Ligninger, og indbefatter integral og differential Regning. 2) Geometrie i den lavere (elementar) som handler allene om rette Linier, og den eene krumme Linie Cirkel-Linien og de Flader og Legemer som ved rette Linier og Cirkel-Linier kan construeres, og høiere, hvorunder henhører alle øvrige krumme Linier, Flader og Legemer.

## Om Mathematikens Nytte.

§. 7.

Mathematiken er saaledes en Samling af mange forskiellige Videnskaber, af hvilke enhver især indeholder en Mængde Kundskaber, hvis Vigtighed og Nytte neppe behøver videre at vises. Dens Anvendelse til at forskaffe det Menneskelige Livs Nødvendigheder og Beqvemmeligheder, giør den nødvendig og vigtig for enhver cultiveret Nation, og at udbrede dens Lærdomme er virkelig at befordre

fordre Menneske-Held og Lyksalighed. Men foruden denne almindelige Nytte, medfører Mathematiken for dens Dyrkere den særdeles vigtige Fordeel: at den skiærper Forstanden, og øver den i at dømme sikkert og rigtigt. Forstandens Skiærpelse og Øvelse i at dømme grundigt er uundværlig for enhver Studerende; og saare nødvendig for ethvert vel opdraget Menneske; men denne Fordeel forskaffer ingen Videnskab i den Grad som Mathematik. Thi da Dømme-Kraften bestandig har Tingene for Øine, og ligesom beskuer dem; saa gaaer den i at anvende de logiske Regler sikkert frem, og er i Stand til let at opdage enhver feil Slutning, hvor skiult den endog maatte være.

Paa denne Maade vænnes Dømme-Kraften ufor-mærkt meere og meere til med Sikkerhed at skielne virkelig Overbeviisning fra bedragende Blændeværk, og Mathematikens Studium bliver saaledes den tilforladeligste praktiske Logik, og tillige den beste Skole for Dømme-Kraften. Denne Fordeel befordres end meere ved den strenge Methode (Fremgangsmaade) som i ingen anden Videnskab saa nøie og fuldkommen kan følges. Vil man altsaa vente at opnaae denne omtalte Nytte, maae Mathematiken aldeles behandles efter den strænge Euclidiske Methode; For Konger vidste denne store Geometer ikke at jævne Vejen til Geometrien; og

vir-

virkelig ethvert Forsøg til saaledes at lette Veien, saa behageligt det end kunde synes, tiener meere til at vanskeliggiøre end til at lette Mathematikens Studium. Man maae altsaa nødvendig strax giøre sig en rigtig Forestilling om denne Mathematiske Methode.

## Om den Mathematiske Lære-Methode.

§. 9.

For at kunde giøre sig et rigtigt Begreb om denne Methode, maae man nødvendig først forstaae de Konst-Ord, under hvilke de Mathematiske Lærdomme fremsættes. De vigtigste ere Forklaringer (definitiones) Satse (propositiones) og Anmærkninger (scholia), hertil kommer endnu i den anvendte Mathematik, Erfaringer og Forsøg. Forklaringen over disse Konst-Ord læres egentlig i Logiken, men maae for Tydeligheds Skyld her fremsættes.

§. 10.

En Forklaring (definitio) er en tydelig og nøiagtig Bestemmelse af hvad der forstaaes ved en Ting, den maae altsaa hverken indeholde flere eller færre Kiændemærker, end der ere tilstrækkelige til at give et bestemt Begreb om den Ting, hvorom der tales.

En

En Sats (propositio) er en Bestemmelse af Forholdet imellem tvende Forestillinger. Den eene, om hvilken den anden bekræftes eller nægtes, kaldes subject; (Gienstand), den anden prædicat (Beskaffenhed).

En Sats er theoretisk, naar den blot bestemmer at en Ting er saaledes eller ikke saaledes, praktisk, naar den bestemmer at noget skal skee, og hvorledes det skal skee.

En theoretisk Sats, hvis Sandhed er, naar man blot forstaaer Ordene hvorved den udtrykkes saa tydelig, at den intet Beviis behøver, kaldes en Grundsats (Axioma).

En praktisk Sats af samme Slags kaldes Fordrings-Sats (postulat).

Naar derimod Sandheden og Rigtigheden af en Sats ikke umiddelbar indsees, men behøver at beviises, hedder den, hvis Satsen er theoretisk, en Lære-Sætning (theorema), og hvis den er praktisk, et Værkstykke, en Opgave (problema). En Sats som enten umiddelbar eller ved en let Slutning udledes af en anden foregaaende, kaldes en Følge, et Tillæg (corollarium). En Lære-Sætning eller Opgave, som indføres i en Videnskab, hvor den ikke egentlig henhører, hedder en Laane-Sætning (lemma). En Anmærkning (scholion) indeholder blot tilfældige Oplysninger,

som

som anbringes ved en Definition eller Sats; eller og Anviisninger til at giøres opmærksomme paa det særdeles vigtige i Beviset.

Et Mathematisk Beviis (Demonstratio) er en intuitiv (beskuelig) Fremstillelse af den nødvendige Forbindelse imellem en Sats's Subject og Prædicat. Demonstrationer ere enten directe (uden Omveje) eller indirecte (apagogiske ɔ: med Omveje) disse vise en Satses Rigtighed af den modsattes Umulighed, hine ligefrem af selvklare eller forudbeviiste Sætninger.

§. 11.

Den Methode, efter hvilken Mathematikerne gaae frem, bestaaer altsaa i følgende: De begynde med Forklaringer og give om enhver Ting, hvorom de tale, hvis den ikke af sig selv er klar, en bestemt Definition. Ethvert Ord de bruge har saaledes sin bestemte og tydelige Bemærkelse, fra hvilken de aldrig afvige. Efter Forklaringerne anføres de nu forstaaelige Grundsætninger, og ved Hielp af disse vises bestandig ikke alene Muligheden af den forklarede Sag, men endog Maaden, hvorpaa den er mulig. Hverken i et Problems Opløsning eller i et Theorems Demonstration maa forekomme en Sats, som ikke i Forveien er fremsat enten som Axiom, Postulat, eller beviist

som

som Theorem Problem og Corollarium og her kan citeres. Til Forkortning i deres Sprog betiene de sig af det vigtige Kunstgreb, at i Stedet for Ord, udtrykke de Størrelserne selv ved Tall eller Bogstaver, og deres Forbindelse med hinanden eller Forhold til hinanden ved beqvemme Tegn.

Men denne Fremgangsmaade, der i Grunden ikke er andet, end den videnskabelige eller systematiske, bør og kan bruges og følges i enhver anden Videnskab, ligesaa nøie som i Mathematiken;

Det væsentlige altsaa i den mathematiske Methode bestaaer ikke deri, men som Kant i sin Kritik der reinen Vernunft tydelig viser, allene deri at Mathematikeren ikke som Philosophen gaaer frem ved at slutte (discursive), men ved selv at danne og construere sine Begreber i Tiden og Rummet, (intuitiv). Heraf sees tillige, at Mathematiken alleene kan anvendes paa sandselige Gienstande (phænomener) som de eeneste der kan giøres beskuelige.

# Arithmetik eller Tal-Videnskab.

## Om Tal og de Tegn hvormed de skrives.

§. 12.

I Følge den nylig forklarede Methode, begyndes altsaa med Forklaringer:

Den Egenskab, som fleere ligeartede Størrelser (§. 1, Anmerk.) have tilfælles, kaldes Eenheden: v. en enkelt Størrelse i sit Slags for sig alleene betragtet, kaldes en Eenhed. Fleere ligeartede Størrelser eller Eenheder tilsammentagne udgiøre et Tall, som altsaa er en Mængde af Eenheder. Men da enhver Størrelse eller enhver Eenhed bestaaer af Deele, eller i det mindste kan ansees at være sammensat af Deele, saa er det klart, at en Eenhed i Hensigt til dens Deele ogsaa kan betragtes som et Tal.

At tælle er at igientage Eenheden; følgelig kan alleene de ligeartede Størrelser sammentælles: f. Ex. Tre Jyder og toe Holsteenere kan ikke sammentælles, da de ikke ere ligeartede Størrelser, men bringes de under et fælles Begreb, og betragtes som Danske~~, da blive~~ de ligeartede og kan sammentælles, og udgiøre fem.

§. 13.

De ved Eenhedens Igientagelse fremkomne Mængder af Eenheder udtrykkes ved dertil valgte

Ord

Ord, som kan kaldes Tall-Ord, saaledes: naar en vis Eenhed lægges til sig selv, benævnes den da udkomne Mængde med Tal-Ordet: to; lægges til denne Mængde den samme Eenhed endnu eengang, da udtrykkes den frembragte Mængde ved tre o. s. v.

For des lettere at kunde benævne den forskiellige Mængde af Eenheder, som saaledes ved Tælning kunde frembringes, betiener man sig kun af følgende usammensatte Tal-Ord, een, to, tre, fire, fem, sex, syv, otte, ni, ti; hvis Bemærkelse af det forhen sagte, let forstaaes, naar Igientagelsen videre fortsettes, bruger man andre af disse enkelte sammensatte Tal-Ord: saaledes er Ordet elleve, det samme som ti og een; Tretten som ti og tre, Tyve er to Gange ti, tredive, tre Gange ti. Denne Maade at sammensætte Tal-Ordene, er bekiendt under Navn af det decadiske Tal-System eller Ti-Tal Systemet. De ved Eenhedens Gientagelse frembragte første Ti Mængder, betegnes nemlig ved de nylig nævnte usammensatte Ord; siden gaaer man frem ved Sammensætning, indtil man faaer ti Tiere, som benævnes med Ordet Hundrede, og nu sammensættes de allerede bekiendte indtil man faaer ti Hundreder som nævnes med Ordet Tusinde. Ved Hielp af disse tolv nye enkelte Ord, kan man ved

Sam-

Sammensættelser udtrykke en overmaade stor Mængde forskiellige Tal-Begreber. Til at tilkiendegive endnu større Mængder, betiener man sig af Ordet Million, som betegner en Mængde af ti Gange hundrede Tusind; og Billion, som betegner ti hundrede Tusind Millioner rc.

Anmerk. Foruden den her forklarede Maade at tælle paa, gives der andre, f. Ex. at tælle til To; til Fem og til Fire rc. hvilke alle af forskiellige have været brugte, og i større Værker findes forklarede; men som jeg har troet her blot at burde nævne.

## §. 14.

Til skriftlig at udtrykke disse Tal-Begreb, betiener man sig i steden for Ord af følgende Zifre eller Tegn 1 (een), 2 (to), 3 (tre), 4 (fire), 5 (fem), 6 (sex), 7 (syv), 8 (otte), 9 (ni), 0 (Nul). Ved Hielp af disse ti Ziffre kan man betegne alle heele Tal, da det samme Ziffer kan betegne forskiellige Tal-Begreb efter den forskiellige Plads det har. Naar man tæller fra høire Side mod venstre, betegner det yderste Ziffer en vis Mængde Eenere, det andet Tiere, det tredie Hundreder, det fierde Tusinder, o. s. v. Nullet bruges allene til at opfylde en tom Plads, og viser at der af den Classe, hvis Plads det optager, ingen er tilstæde. F. Ex. 7 betegner syv Eenheder. 74 er 4 Eenere og 7 Tiere eller fire og halvfierd-

fierdsindstyve, 305 læses fem Enere, ingen Tiere og tre Hundreder, eller kortere tre Hundrede og fem. Den simpleste Maade at læse et ved mange Zifre udtrykt Tal var at læse fra høire mod venstre, da man veed at Zifrenes Værdi voxer og bliver ti Gange høiere for hver Plads de i den Orden rykke frem; men for hurtig at kunde læse en saadan Mængde Zifre fra venstre til høire behøver man blot, at aftælle dem fra høire og sætte ved hver tredie Ziffer et Komma, og over det Tal, som følger næst det andet Komma, et Punct eller Streg, over det næst det fierde Komma to Puncter o. s. v. da vil det Ziffer med eet Punct eller Streg over, betyde Millioner, det med to Punkter Billioner, og man vil da uden Vanskelighed saavel kunde læse ethvert med Zifre skrevet Tal, som og kunde skrive ethvert givet: f. Ex.

7,803,438,765,902,487,604

læses: syv Trillioner, otte Hundrede og tre Tusinde, fire Hundrede og otte og tredive Billioner, syv Hundrede, fem og tredsindstyve Tusinde, ni Hundrede og to Millioner, og fire Hundrede og syv og firsindstyve Tusind, sex Hundrede og fire.

Anmærk. Denne vigtige Opfindelse at kunde med 10 Zifre skrive alle mulige Tal Begreb, har Gerbert, (som siden blev Pave under Navn af Sylvester den anden) først giort bekiendt i Europa; at

Gerbert har lært denne Konst af Araberne, synes aldeles rimeligt, saavel af hans Breve, som og af den Maade hvorpaa Zifrene læses, der tydelig nok røber deres østerlándske Oprindelse.

§. 15.

Foruden disse nu bekiendte Tal-Zifre, bruge Mathematikerne for Kortheds Skyld, følgende Tegn:

Tillægnings Tegnet + (plus) som læses ved det Ord og, og naar det sættes mellem tvende Størrelser, betyder at de skal lægges sammen, f. Ex. 8 + 3 læser otte og tre.

Fradragnings Tegnet ÷ (minus) betyder mindre og naar det sættes imellem 2 Tal, tilkiendegiver det, at det sidste skal trækkes fra det første, f. Ex. 12 ÷ 8 hedder otte fra tolv, v. tolv mindre end otte.

Igientagelses Tegnet ×, læses ved Ordet Gange, og betegner naar det sættes mellem to Tal, at det eene skal gientages saa ofte som det andet indeholder Eenheden, f. Ex. 8 × 3 er 8 igientagen 3 Gange.

Deelings Tegnet, :, som naar det sættes imellem to Tal, tilkiendegiver at man skal dele det første med det sidste ɔ: dele det første i saa mange

lige-

ligestore Dele, som det største indeholder Eenheden. f. Ex. 12 : 4 hedder 12 skal deles i 4 lige Dele.

Ligheds Tegnet $=$, som viser, at de Størrelser, imellem hvilke det sættes ere lige store f. Ex. $5 + 3 = 8$ hedder 5 lagt til 3 er lig 8.

Ulighedс Tegnet $<$, som sættes imellem ulige store Størrelser, med Spidsen mod den mindre og Aabningen mod den større. f. Ex. $8 > 5$ betegner at 8 er større end 5; men $3 < 7$ betegner at 3 er mindre end 7.

## Om de almindelige Forandringer, der kan foretages med Størrelser, eller de fire Regnings-Arter i hele Tal.

§. 16.

Naar alle de adskilte Størrelser som efter § 4 ere Gienstænder for Tal-Videnskaben, kunde ved simpel Tælning findes og bestemmes, da indskrænkedes denne Videnskab blot til det her nu foreløbig er fremsat, men da der gives mangfoldige Tilfælde, hvor den simple Tælning deels vilde være umulig og deels alt for vidtløftig, saa skal Arith-

 metiken

metiken efter at have lært os Tallene og deres Natur, tillige lære os de Methoder, ved hvilke vi ved Hielp af visse givne og med Tal udtrykte Størrelser finde de ubekiendte, som derved bestemmes; denne Deel af Arithmetiken kaldes i Almindelighed Regne-Konst. Dens egentlige Opfindelses Methode bestaaer i at foretage adskillige Forandringer med de givne Tal, for at finde det søgte. Disse Forandringer ere sædvanlig bekiendte under Navn af Regnings-Arter.

Al Forandring, som kan foretages med en given Størrelse, maae enten gaae ud paa at formere eller formindske den. Der ere altsaa kun tvende Hoved-Forandringer eller Regnings-Arter mulige, nemlig: Størrelsernes Formerelse og Formindskelse; men da Formerelsen kan skee paa to forskiellige Maader, og Formindskelsen ligeledes, saa har man antaget fire saadanne Forandringer eller Regnings-Arter. Hvoraf de tvende vise hvorledes en Størrelse kan formeres og de to hvorledes den formindskes. Som oversees let saaledes:

Additio

| | |
|---|---|
| Tals Formerelse | |
| Addition v. Sammenlægning | summerende Tal: 8 + 5 + 3 + 4 = 20 Summen |
| Multiplicatio v. Igientagelse | Factorer: 8 × 5 v. (8 . 5) = 40 Product<br>8<br>8<br>8<br>8 |
| Formindskelse | |
| Subtraction v. Fradragning | Minuenden 20 — Subtrahenden 8 = 12 differentz v. Forskiel |
| Division v. Deelning | Dividend 20 : Divisor 4 = 5 Qvotient<br>4<br>16<br>4<br>12<br>4<br>8<br>4<br>4<br>4<br>0 |

Addition bestaaer i at formere en Størrelse ved at legge andre ligeartede Størrelser dertil, og det hele derved udbragte kaldes Summen.

Multiplication formerer en given Størrelse ved at igientage den saa ofte, som et givet Tal til-

tilkiendegiver, de givne Tal kaldes Faktorer, og det udbragte Produkt.

Subtraction formindsker en given Størrelse ved at trække en anden given ligeartet Størrelse derfra, den der skal formindskes, kaldes Minuenden, og den der skal fradrages Subtrahenden, det tilbageblevne Differentz.

Division lærer at formindske en Størrelse, ved at fradrage en anden given Størrelse saa ofte det er muligt. Den givne Størrelse som skal formindskes, kaldes Dividenden, den der skal fradrages Divisor, og det Tal som viser hvor ofte Divisor kan drages fra Dividenden, kaldes Qvotient.

## §. 17.

Efter saaledes at have fremsat de nødvendige Forklaringer (Grundsætningerne skal siden blive anførte) kommer jeg nu til nøiere at giennemgaae de i forrige § nævnte fire Regnings-Arter:

At addere flere forskiellige med Tal udtrykte Størrelser, er altsaa at finde et Tal, som udtrykker den samme Mængde af Eenheder, som de flere forskiellige tilsammentagne. Men da en ved Tal udtrykt Størrelse allene kan formeres ved at legge

lige,

ligeartede Størrelser dertil, saa indsees let at Summen altid vil indeholde samme Classe af Eenheder, som de sammenlagte Tal. Saaledes vil flere Eenere sammenlagte udgjøre en Sum af Eenere; flere Tiere en Sum af Tiere o. s. v.

For at kunde hurtig udøve Additionen, fordres nødvendig at man veed Summen af ethvert Par af de ni enkelte Tal, dette findes enten ved at tælle paa Fingrene eller ved at skrive saa mange Streger eller Punkter som der ere Eenheder i de Tal, der skal adderes, og sammentælle dem. Veed man dette, findes Summen af de sammensatte Tal let paa følgende Maade: Man ordner de givne Tal saaledes, at Eenerne komme under Eenerne, Tiere under Tiere o. s. v.; tæller derpaa hver Classe sammen for sig; og samler endelig disse enkelte Summer til een Hoved-Sum. Til Exempel ville vi antage at følgende Tal skulde adderes: 874, 1359, 7486. disse givne Tal ordnes da som nylig er sagt, og naar nu hver Classe af Eenheder tælles for sig, har man nitten Eenere, tyve Tiere, sexten Hundreder, og otte Tusinder, som samlede udgiøre Summen Ni Tusinde siu Hundrede og Nitten, eller og saaledes:

874

| | |
|---|---|
| 874<br>1359<br>7486<br>―――<br>19 Enere<br>20 Tiere<br>15 Hundreder<br>8 Tusinder<br>―――<br>9719 | Enerne sammenlagte udgiøre 19, men efter §. 13 udgiøre ti Enere en Tier, de 9 skrives derfor paa Enernes Plads, og den eene Tier tegnes eller legges strax til Tierne, man faar da 21 Tiere som udgiøre 2 Hundrede og en Tier o s. f. |

Til Lettelse i Sammentælningen kan man bemærke ved et Punct eller Streg hvor ofte man kommer til ti, og saaledes paa en let Maade erindre hvor mange man fra den optalte Classe af Eenheder har at legge til den følgende, f. Ex.

| | |
|---|---|
| 7.8 6.4.<br>3.8.7<br>5 9.8.<br>3 0 7 6.<br>9.8.7<br>―――<br>1 2 9 1 2 | Ved at sammentælle den første Classe eller Enere, har jeg 7 og 6 er 13, det er tre Enere og en Tier med et Punct, ved sex anmærker jeg, at jeg har en Tier henlagt, og tæller videre ikke 13 og 8 men 3 og 8 er 11, her giøres nok et Mærke og tælles videre, 1 og 7 er 8 og og 4 er 12 som er 2 over ti, der giøres igien et Punct, jeg har nu to Enere og tre Tiere som de tre Punkter |

ter udvise, og saaledes fortfares alle Classerne igiennem.

Paa denne Maade vil man med Hurtighed og Lethed kunde iværksætte Additionen, naar man kun som forhen er sagt, veed Summerne af de 9 enkelte Tal. Den simpleste og bedste Prøve paa Additionen er at regne det samme Exempel flere Gange, saaledes at man een Gang tæller fra neden opad, og en anden Gang fra oven og ned, faaer man da ved begge Tælninger samme Sum, kan man med al Rimelighed slutte at man har adderet rigtig. Ved meget vidtløftige Additioner kan man dele de opgivne summerende Tal i flere Dele, og summere hver Deel og siden sammenlægge partial Summerne. som:

| | |
|---|---|
| 3245 | |
| 7897 | |
| 598 | |
| 1034 | |
| | 12774 |
| 876 | |
| 958 | |
| 3279 | |
| 426 | |
| | 5539 |
| | Lateris 18313 |

| | | |
|---|---|---|
| | Transport 18313 | |
| | 8357 | |
| | 943 | |
| | 876 | |
| | 10176 | |
| 28489 | — | 28489 |

og naar man da efter at have sammentalt de enkelte Summer, under et sammentæller det heele, tiener det tillige som Prøve paa Additionens Rigtighed.

§. 18.

De Tal, om hvis Addition vi hidtil have talt, kaldes ubenævnte, efterdi de blot udtrykke en Mængde af Eenheder uden at bestemme deres Art eller Beskaffenhed (§ 3) naar derimod tillige haves Hensyn til Eenhedens Art, kaldes Tallet benævnt. Saadanne benævnte Tal adderes paa samme Maade som de ubenævnte, naar man allene veed, hvad Forhold de forskiellige Arter staae i til hinanden, og hvor mange af den ringere Sort der gaae paa den høiere. Saaledes for at kunde addere forskiellige Summer Penge, som efter den her brugelige Inddeling, i Almindelighed udtrykkes ved Rigsdaler, Mark, Skilling, er det nødvendigt at vide at 1 Rd. er sex Mark og 1 Mark sex-

ten Skilling. Man skriver da de opgivne summerende Tal under hinanden og tæller først Skillingerne sammen, og undersøger hvor mange Mark de samlede Skillinger udgiøre, de overblevne Skillinger, som ikke udgiøre en Mark tegnes paa Skillingers Plads, og Markerne mærkes for at lægges til de sammentalte Marker, der igien giøres til Rigsdalere, f. Ex. at addere:

| | | |
|---|---|---|
| 48 Rd. | 3 Mk. | 12 Sk. |
| 53 — | 4 — | 14 — |
| 8 — | 2 — | 10 — |
| 13 — | 5 — | 8 — |
| 29 — | 2 — | 13 — |
| 154 Rd. | 1 Mk. | 9 Sk. |

Skillingerne sammenlagte udgiøre 57, da nu 16 Skilling udgiør 1 ℔, saa findes ved at prøve hvor ofte 16 indeholdes i 57 (hvilket saalænge Divisionen ikke er lært, kan erfares under Skillingers Sammenlægning ved med et Punct eller Komma at mærke hver Gang man naaer sexten,) at 57 ß er 3 ℔ og 9 ß, de 9 ß skrives paa Skillingernes Plads, og de 3 ℔ lægges til Markerne, som sammenlagte blive 19, nu er 6 ℔ en Rigsdaler, altsaa ere de 19 ℔, 3 Rdlr. og 1 ℔, den eene Mark skrives paa Markernes Plads, og de tre Rigsdaler adderes til Rigsdalerne paa den i forrige § forklarede Maade.

§. 19.

At subtrahere et mindre Tal fra et større; skeer ved at tage saa mange Eenheder fra det større som der indeholdes i det mindre, ved de enkelte Tal skeer det som ved Additionen er forklaret § 17, og ved de sammensatte paa følgende Maade:

Man ordner Tallene som ved Addition, nemlig Eenerne i Subtrahenden under Eenerne i Minuenden, Tierne under Tierne o. s. v. Man begynder da Subtractionen fra Eenerne, og fortfarer siden med de høiere Clásser, treffer det nu at der af en vis Classe er et større Antal i Subtrahenden end i Minuenden, saa da et større Tal ikke kan tages fra et mindre, saa tager jeg af den næste Classe, som altid efter § 14 er ti Gange høiere i Værdi een Eenhed, som udgiør ti af dem hvorfra jeg skulde subtrahere, disse legges til de forrige, og nu iværksættes Fradragningen, dette kaldes i Almindelighed at laane een, som er ti; til Ex. lad 8976 subtraheres fra 21348 de skrives da under hinanden:

$$\begin{array}{r} 21348 \\ 8976 \\ \hline 12372 \end{array}$$

Nu subtraheres 6 Eenere fra 8 Eenere, der bliver da to til Rest, som skrives under Stregen

paa

paa Enernes Plads; syv Tiere skulde trækkes fra fire Tiere, men da det ikke gaaer an, laanes een af Hundrederne som er ti Tiere, disse lagde til de 4 udgiøre 14 Tiere, og nu trækkes de 7 derfra der bliver da syv Rest som skrives paa Tiernes Plads under Stregen, og saaledes fortfares med de øvrige Classer. Med en Punkt eller Streg bemærkes de Tal hos hvilke det saakaldte Laan er giort, for at erindre at de ere bleven formindskede en Eenhed i deres Værdi. Findes et Nul paa den Plads hvor man skulde laane, da maae man gaae det forbi og laane hos det følgende saaledes: jeg skal fradrage 897 fra 304.06

897

29509

jeg skulde her laane en Tier, men finder ingen, jeg laaner da en Hundreder, som er ti Tiere, af disse laaner jeg een som er ti Eenere, og Subtraktionen skeer nu som ovenfor er forklaret, af de ti Tiere brugtes kun een, de ni ere altsaa tilbage og sættes i Nullets Sted, og Subtractionen skeer da ligefrem, dette har givet Anledning til den praktiske Regel, at naar i Subtraktionen et Nul overspringes for at laane, bliver det at ansee derefter som et Ni-Tal.

§. 20.

Subtractionen med benævnte Tal skeer som med ubenævnte, naar man kun som i Anledning af Additionen § 18 er anmærket, kiender Inddelingen og Forholdet af de forskiellige Ting, som skal subtraheres:

f. Ex. fra 2.8.6. Rd. 2. ₰ 8 ß
skal subtraheres 97 — 5 — 12 —

Rest 188 Rd. 2 ₰ 12 ß

12 ß skulde subtraheres fra 8 ß, det gaar ikke an, her laanes da 1 ₰, som efter det bekiendte Forhold er 16 ß, disse legges til de 8, og nu subtraheres 12 fra 24, og Resten skrives under Stregen o. s. v.

Da man ved Subtractionen formindsker det større Tal ved at tage saa mange Eenheder bort som der er i Subtrahenden § 19, saa sees let, at naar det overblevne (difference Forskiel) legges til Subtrahenden, da udkommer Minuenden, og at følgelig en sikker Prøve haves paa Subtractionen, naar Differentzen og Subtrahenden igien adderes, og man da faaer Minuenden. Subtraction og Addition ere derfor modsatte Regnings-Arter, og den eene tiener til at prøve den anden.

Foruden de Tilfælde i Subtractionen jeg hidindtil har betragtet, hvor Minuenden i det Hele stedse

har

har været større end Subtrahenden; gives der og Tilfælde, hvor et større Tal virkelig skal trækkes fra et mindre; men disse Tilfælde forklares bedst tillige med Læren om modsatte Størrelser, hvortil den nærmest henhører, og forbigaaes derfor paa dette Sted.

§. 21.

At Multiplicere er efter Forklaringen i § 16, at igientage den eene Faktor, saa ofte som Eenheden indeholdes i den anden. Multiplicationen er altsaa ikke andet end en ofte igientagen Addition. Faktorerne kan enten være begge enkelte Tal, eller og begge sammensatte eller og een enkelt og een sammensat. I første Tilfælde findes Productet ved enten i Tankerne eller paa Papiret at lægge saa ofte den eene Faktor til sig selv, som den anden tilkiendegiver; f. Ex. hvormeget er $5 \times 4$ sim des skaffes:

$\overset{I}{5} + \overset{II}{5} + \overset{III}{5} + \overset{IIII}{5} = 20$, jeg lægger nemlig Tallet fem til sig selv fire Gange; men for med Hurtighed og Lethed at kunde iværksætte Multiplicationen forudsættes, at man veed Produkterne af de ni enkelte Tal, hvilke følgende Tabel, der blot ved Addition er forfærdiget, udviser.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

I den første Rad staae de ni enkelte Tal, disse adderes til sig selv, og saaledes dannes den anden Rad, som legges til den første saa fremkommer den tredie, der igien lagt til den første giver den fierde o. s. v.

Vil man nu ved Hielp af denne Tabel vide Produktet af 5 og 7, da søge man i den første vertikale Rad fra venstre Tallet 5, og i den øverste horisontale Rad Tallet 7, den horisontale Rad som begynder med 5 og den verticale som begynder med 7, vil da støde sammen, og det Tal som er fælles for dem begge er det søgte Produkt som her er 35.

§. 22.

Veed man nu enten ved Hielp af oven forklarede Tabel eller paa anden Maade Produkterne af de enkelte Tal, da findes Produktet af et sammen-

menſat og et enkelt ved at opløſe det ſammenſatte i de enkelte hvoraf det beſtaaer, multiplicere et hvert for ſig med det givne Tal, og ſiden addere partial Produkterne f. Ex. naar 4589 ſkulde multipliceres med 9, da opløſes dette ſammenſatte Tal i 4 Tuſinder 5 Hundreder 8 Tiere 9 Eenere 4000 + 500 + 80 + 9 hver af diſſe igientages ni Gange, og jeg faaer

| | |
|---|---|
| 36000 | 4500, 720, 81 diſſe |
| 4500 | Produkter ſammenlagte |
| 720 | udgiøre 41301 ſom er det |
| 81 | ſøgte Produkt |
| 41301 | |

kortere ſaaledes: Ni Gange ni Eenere er 81 Eenere

| | |
|---|---|
| 4589 | ſom efter § 14 er 8 Tiere |
| 9 | og 1 Eener, den 1 ſkrives |
| 41301 | paa Eenernes Plads og de 8 bemærkes, nu igienta- |

ges de 8 Tiere 9 Gange, ſom giør 72 Tier, hertil lægges de 8 ſom vare udkomne ved Eenernes Igientagelſe, der bliver da 80 Tiere ſom netop udgiøre 8 Hundreder, med 0 bemærkes altſaa paa Tiernes Plads, at der ingen er, og ſaaledes fortfares indtil den hele Multiplication er tilendebragt.

§. 23.

Ere begge Faktorerne ſammenſatte Tal, da multipliceres paa den i forrige § forklarede Maade,

 første

først med Eenerne, dernæst med Tierne o. s. f. men Produktet som fremkommer ved at multiplicere med Tierne, skrives paa Tiernes Plads, og det med Hundrederne paa Hundredernes Plads o. s. v., thi da f. Ex. 40 er = 4 × 10, saa maae Productet som fremkommer ved at multiplicere med 40, blive 10 Gange saa høit, som ved at multiplicere med 4, og Formerelsen med 10 skeer efter Tal-Systemets § 14 forklarede Natur, ved at rykke Tal-Zifrene frem en Plads fra høire til venstre, naar dette iagttages, da kan de ved Multiplikation med Eenere, Tiere og Hundreder 2c. frembragte enkelte Produkter ved Addition foreenes til et Hoved-Produkt, sæt til Ex. at 5478 skal multipliceres med 657, der er at Tallet 5478 skal igientages 600 Gange, og 50 Gange og 7 Gange, det skeer saaledes:

```
  5478
   657
 -----
 38346
27390
32868
-------
3599046
```

først multipliceres efter § 22 med de 7 Eenere, dernæst med de 5 Tiere, det udkomne Produkt 27390 rykkes frem en Plads fra høire mod venstre, da 5 ikke var Eener, men egentlig 5 × 10.

Nu multipliceres med 6, og det da udkomne rykkes frem paa Hundredernes Plads, da de 6 ere ikke Eenere men 6 × 100. Hvis man be-

gyndte Multiplikationen med Hundrederne, da maatte Produkterne siden rykkes fra venstre til høire, efterdi de da blev ringere, og det vilde staae saaledes:

```
  5478
   657
 -----
 32868
  27390
   38346
 -------
 3599046
```

Tillæg 1. Til Lettelse i Multiplicationen med sammensatte Tal, tiener det ogsaa at opløse den Faktor, hvormed der multipliceres, (Multiplicator) i de Faktorer, hvoraf den er sammensat, og da multiplicere det givne Tal (Multiplicanden) først med den eene Faktor, og det derved fremkomne Produkt, med den anden f. Ex. 456 × 24, i Steden for at igientage 456 fire og tyve Gange umiddelbar, saa opløses 24 i Faktorerne 6 og 4, og det givne 456 multipliceres først med 6, og det da udkomne igien med 4, hvorved det søgte Produkt rigtig erholdes; thi da 24 er 6 × 4 saa følger at Eenheden indeholdes ligesaa ofte i 6 × 4 som i 24. Formerelsen bliver altsaa det samme, om jeg igientager den givne Størrelse 24 Gange eller 6 × 4 Gange saaledes:

| | |
|---|---|
| 456 × 24 | 456 |
| 6 (6 × 4) | 24 |
| 2736 | 1824 |
| 4 | 912 |
| 10944 | 10944 |

Tillæg 2. Findes i den Faktor, hvormed der multipliceres, Nuller, da multipliceres allene med de øvrige Zifre og Nullerne forbigaaes, thi at gientage en Størrelse ingen Gang, giver naturligviis intet Produkt, dog passes at de ved de øvrige Zifre frembragte partial Produkter rykkes hen mod venstre paa deres behørige Plads.

Har fremdeles enten den eene eller begge Faktorer Nuller yderst mod høire, da forrettes Multiplicationen med de øvrige Zifre som om ingen Nuller vare, og naar disse partial Produkter ere adderede, føies til Hoved-Produktet saa mange Nuller som der vare i begge Faktorerne, for Exempel.

32000 × 4700.

| | |
|---|---|
| 32000 | 5094 |
| 4700 | 708 |
| 224 | 40752 |
| 128 | 35658 |
| 250400000 | 3606551 |

§. 24.

Multiplicationen med benævnte Tal vil uden synderlig Vanskelighed forstaaes, naar man erindrer, at den eene Faktor altid maae være, eller dog ansees for et ubenævnt Tal, thi at multiplicere med 3 Rd. er jo en Umulighed; thi hvad vilde det sige at igientage en Ting 3 Rd. Gange, og saaledes med ethvert benævnt Tal; jeg vil derfor allene oplyse det med et Exempel: Der forlanges at 548 Rd. 3 ℳ 8 ß skal multipliceres med 6, jeg kan da enten forvandle de givne Rigsdaler og Mark til Skillinger, og efter det forhen forklarede multiplicere dem med 6, jeg faaer da Produktet i Skillinger, men da saa store Summer i det dagelige Liv ikke beregnes i Skilling, er det beqvemmere at forrette Multiplicationen ved hver enkelt Deel, saaledes 548 Rd. 3 ℳ 8 ß × 6

6

---

3291 Rd. 3 ℳ - ß

de 8 ß gientages 6 Gange, og jeg har 48 ß, men da disse netop udgiøre 3 ℳ, saa bliver i Produktet ingen Skilling, derpaa gientages de 3 ℳ 6 Gange, og dertil lægges de ved Skillingernes Igientagelse udkomne 3 ℳ, det bliver da 21 ℳ som er 3 Rd. 3 ℳ, de 3 ℳ skrives paa Markernes Plads og Rigsdalerne giemmes for at lægges til det her

ud-

udkommende Produkt. Hvorledes Multiplicationen kan prøves, skal ved Divisionen blive forklaret.

§. 25.

At dividere er efter den § 16 givne Forklaring ikke andet, end oftere at igientage Subtractionen med et og samme Tal; for altsaa at kunde iværksætte dette, behøvedes allene at kunde subtrahere, f. Ex. 24 : 6; her skal efter Forklaringen 24 formindskes, ved at trække 6 saa ofte derfra som muligt, og det findes saaledes:

| | |
|---|---|
| 24 | |
| 6 | 1 |
| 18 | |
| 6 | 1 |
| 12 | |
| 6 | 1 |
| 6 | |
| 6 | 1 |
| 0 | 4 |

Jeg anmærker med et Komma eller Streg hver Gang 6 trækkes fra 24, og disse Streger sammentælles siden, og jeg erholder da Qvotienten.

Saa simpel og rigtig som denne Maade er, saa vidtløftig er den allerede i smaae Tal, end sige i større. Man har derfor andre Maader, indrettede efter det decadiske Tal-System, som siden skal forklares. Da et Tal maae kunde trækkes saa ofte fra et andet som det indeholdes deri, saa bestaaer

Divi-

Divisionen i Følge Forklaringen ogsaa i at undersøge hvor ofte en given Størrelse (Divisor) indeholdes i en anden given Størrelse (Dividenden), da nu allene ligeartede Størrelser kan indeholdes i hinanden, saa følger at Dividend og Divisor maae altid være ligeartede Størrelser, og Qvotienten vil da blive et ubenævnt Tal; der indeholder Eenheden saa mange Gange som Divisor indeholdes i Dividenden.

Men der møde og Tilfælde, hvor Divisionen gaaer ud paa at dele Dividenden i saa mange ligestore Dele, som Divisor tilkiendegiver, Divisor maae da være et ubenævnt Tal, og Qvotienten ligeartet med Dividenden. Saa ofte som Eenheden da indeholdes i Divisor maae Qvotienten indeholdes i Dividenden.

Af disse fremsatte Forklaringer følge

1) at naar Divisor er 1, bliver Qvotienten det samme som Dividenden

2) at naar Divisor er lige stor med Dividend, bliver Qvotienten = 1. —

3) er Dividenden 0 bliver Qvotienten, hvad end Divisor er altid 0

4) er derimod Divisor 0, bliver Qvotienten en uendelig stor Størrelse, (hvorom i det følgende skal handles).

§. 26.

At dividere et Tal med et andet, skeer altsaa uden Vanskelighed ved Hielp af den § 21 anførte Tabel, saa længe Dividenden er mindre end 100, og Divisor et af de ni enkelte Tal. f. Ex. 30 : 6 = 5. Af Tabellen veed man at 6 × 5 = 30. ɔ: 30 indeholder 6 saa ofte som 5 indeholder Eenheden, nu spørges her hvor ofte 6 indeholdes i 30, eller hvorofte 6 kan trækkes fra 30, intet er da klarere, end at naar 30 frembringes ved 5 Gange at igientage 6, saa maae ogsaa 6 kunde trækkes 5 Gange fra 30, og 5 er da den søgte Qvotient.

Er Dividenden et høiere Tal, men Divisor et af de enkelte Tal, iværksættes Divisionen ved at opløse Dividenden i Dele, dividere hver Deel for sig, og siden addere partial Qvotienterne. f. Ex. 6369 : 3 nu er 6369 = 6000 + 300 + 60 + 9, først prøves nu hvor ofte 3 indholdes i 6000, men da 6000 er = 6 × 1000 og 3 indeholdes 2 Gange i 6, saa følger at det i 6000 indeholder 2000 Gange, i 300 paa samme Maade 100 Gang, og i 60, 20 Gange og endelig i 9, 3 Gange.

Partial Qvotienterne 2000 + 100 + 20 + 3, som sammenlagte udgiøre den egentligte Qvotient = 2123.

Efter

Efter det decadiske Tal-Systems Natur skeer dette lettere ved strax at hensætte Qvotienterne, da Stedet vil give dem deres Værdie, forrige Exempel vil da staae saaledes:

```
3)6369|2123
  6   |
  ――
   3
   3
   ――
    6
    6
    ――
     9
     9
     ――
     0
```

Man sætter Divisor foran, og ved en Streg skiller den fra Dividenden, som ligesedes med en Streg indsluttes fra høire Side, bag hvilken Qvotienten hensettes, nu begyndes med Divisionen fra venstre, og prøves hvor ofte 3 indeholdes i 6, af Tabellen veed man at det er 2 Gange, 2 hensættes paa den til Qvotienten bestemte Plads, og faaer ved det at de følgende Tal 1—2—3 ved Divisionens Fortsættelse henhættes paa høire Side deraf, den Værd af Tusinde, som det bør have, siden de 6 ikke vare Eenere men Tusinder; og saaledes fortsættes med Hundreder, Tiere og Eenere.

Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Tal, skeer Divisionen egentlig paa samme Maade, med nogle Forandringer som best oplyses ved et Par Exempler:

først med Enerne, dernæst med Tierne o. s. f. men Produktet som fremkommer ved at multiplicere med Tierne, skrives paa Tiernes Plads, og det med Hundrederne paa Hundredernes Plads o. s. v., thi da f. Ex. 40 er = 4 × 10, saa maae Productet som fremkommer ved at multiplicere med 40, blive 10 Gange saa høit, som ved at multiplicere med 4, og Formerelsen med 10 skeer efter Tal-Systemets § 14 forklarede Natur, ved at rykke Tal-Zifrene frem en Plads fra høire til venstre, naar dette iagttages, da kan de ved Multiplikation med Enere, Tiere og Hundreder ꝛc. frembragte enkelte Produkter ved Addition foreenes til et Hoved-Produkt, sæt til Ex. at 5478 skal multipliceres med 657, der er at Tallet 5478 skal igientages 600 Gange, og 50 Gange og 7 Gange, det skeer saaledes:

| | |
|---|---|
| 5478<br>657<br>———<br>38346<br>27390<br>32868<br>———<br>3599046 | først multipliceres efter § 22 med de 7 Enere, dernæst med de 5 Tiere, det udkomne Produkt 27390 rykkes frem en Plads fra høire mod venstre, da 5 ikke var Ener, men egentlig 5 × 10. |

Nu multipliceres med 6, og det da udkomne rykkes frem paa Hundredernes Plads, da de 6 ere ikke Enere men 6 × 100. Hvis man begyndte

gyndte Multiplikationen med Hundrederne, da maatte Produkterne siden rykkes fra venstre til høire, efterdi de da blev ringere, og det vilde staae saaledes:

| |
|---|
| 5478 |
| 657 |
| 32868 |
| 27390 |
| 38346 |
| 3599046 |

Tillæg 1. Til Lettelse i Multiplicationen med sammensatte Tal, tiener det ogsaa at opløse den Faktor, hvormed der multipliceres, (Multiplicator) i de Faktorer, hvoraf den er sammensat, og da multiplicere det givne Tal (Multiplicanden) først med den eene Faktor, og det derved fremkomne Produkt, med den anden f. Ex. 456 × 24, i Steden for at igientage 456 fire og tyve Gange umiddelbar, saa opløses 24 i Faktorerne 6 og 4, og det givne 456 multipliceres først med 6, og det da udkomne igien med 4, hvorved det søgte Produkt rigtig erholdes; thi da 24 er 6 × 4 saa følger at Eenheden indeholdes ligesaa ofte i 6 × 4 som i 24. Formerelsen bliver altsaa det samme, om jeg igientager den givne Størrelse 24 Gange eller 6 × 4 Gange saaledes:

| | |
|---|---|
| 456 × 24 | 456 |
| 6 {6 × 4} | 24 |
| 2736 | 1824 |
| 4 | 912 |
| 10944 | 10944 |

Tillæg 2. Findes i den Faktor, hvormed der multipliceres, Nuller, da multipliceres allene med de øvrige Zifre og Nullerne forbigaaes, thi at gientage en Størrelse ingen Gang, giver naturligviis intet Produkt, dog passes at de ved de øvrige Zifre frembragte partial Produkter rykkes hen mod venstre paa deres behørige Plads.

Har fremdeles enten den eene eller begge Faktorer Nuller yderst mod høire, da forrettes Multiplicationen med de øvrige Zifre som om ingen Nuller vare, og naar disse partial Produkter ere adderede, føies til Hoved-Produktet saa mange Nuller som der vare i begge Faktorerne, for Exempel.

32000 × 4700.

| | |
|---|---|
| 32000 | 5094 |
| 4700 | 708 |
| 224 | 40752 |
| 128 | 35658 |
| 250400000 | 3606551 |

§. 24.

Multiplicationen med benævnte Tal vil uden synderlig Vanskelighed forstaaes, naar man erindrer, at den eene Faktor altid maae være, eller dog ansees for et ubenævnt Tal, thi at multiplicere med 3 Rd. er jo en Umulighed; thi hvad vilde det sige at igientage en Ting 3 Rd. Gange, og saaledes med ethvert benævnt Tal; jeg vil derfor allene oplyse det med et Exempel: Der forlanges at 548 Rd. 3 ℔ 8 ß skal multipliceres med 6, jeg kan da enten forvandle de givne Rigsdaler og Mark til Skillinger, og efter det forhen forklarede multiplicere dem med 6, jeg faaer da Produktet i Skillinger, men da saa store Summer i det dagelige Liv ikke beregnes i Skilling, er det beqvemmere at forrette Multiplicationen ved hver enkelt Deel, saaledes 548 Rd. 3 ℔ 8 ß × 6

6

3291 Rd. 3 ℔ ‧ ß

de 8 ß gientages 6 Gange, og jeg har 48 ß, men da disse netop udgiøre 3 ℔, saa bliver i Produktet ingen Skilling, derpaa gientages de 3 ℔ 6 Gange, og dertil lægges de ved Skillingernes Igientagelse udkomne 3 ℔, det bliver da 21 ℔ som er 3 Rd. 3 ℔, de 3 ℔ skrives paa Markernes Plads og Rigsdalerne giemmes for at lægges til det her

udkommende Produkt. Hvorledes Multiplicationen kan prøves, skal ved Divisionen blive forklaret.

§. 25.

At dividere er efter den § 16 givne Forklaring ikke andet, end oftere at igientage Subtractionen med et og samme Tal; for altsaa at kunde iværksætte dette, behøvedes allene at kunde subtrahere, f. Ex. 24 : 6; her skal efter Forklaringen 24 formindskes, ved at trække 6 saa ofte derfra som muligt, og det findes saaledes:

| | |
|---|---|
| 24 | |
| 6 | 1 |
| 18 | |
| 6 | 1 |
| 12 | |
| 6 | 1 |
| 6 | |
| 6 | 1 |
| 0 | 4 |

Jeg anmærker med et Komma eller Streg hver Gang 6 trækkes fra 24, og disse Streger sammentælles siden, og jeg erholder da Qvotienten.

Saa simpel og rigtig som denne Maade er, saa vidtløftig er den allerede i smaae Tal, end sige i større. Man har derfor andre Maader, indrettede efter det decadiske Tal-System, som siden skal forklares. Da et Tal maae kunde trækkes saa ofte fra et andet som det indeholdes deri, saa bestaaer

Divi-

Divisionen i Følge Forklaringen ogsaa i at undersøge hvor ofte en given Størrelse (Divisor) indeholdes i en anden given Størrelse (Dividenden), da nu allene ligeartede Størrelser kan indeholdes i hinanden, saa følger at Dividend og Divisor maae altid være ligeartede Størrelser, og Qvotienten vil da blive et ubenævnt Tal; der indeholder Eenheden saa mange Gange som Divisor indeholdes i Dividenden.

Men der møde og Tilfælde, hvor Divisionen gaaer ud paa at dele Dividenden i saa mange ligestore Dele, som Divisor tilkiendegiver, Divisor maae da være et ubenævnt Tal, og Qvotienten ligeartet med Dividenden. Saa ofte som Eenheden da indeholdes i Divisor maae Qvotienten indeholdes i Dividenden.

Af disse fremsatte Forklaringer følge

1) at naar Divisor er 1, bliver Qvotienten det samme som Dividenden

2) at naar Divisor er lige stor med Dividend, bliver Qvotienten = 1. —

3) er Dividenden 0 bliver Qvotienten, hvad end Divisor er altid 0

4) er derimod Divisor 0, bliver Qvotienten en uendelig stor Størrelse, (hvorom i det følgende skal handles).

§. 26.

§. 26.

At dividere et Tal med et andet, skeer altsaa uden Vanskelighed ved Hielp af den § 21 anførte Tabel, saa længe Dividenden er mindre end 100, og Divisor et af de ni enkelte Tal. f. Ex. 30 : 6 = 5. Af Tabellen veed man at 6 × 5 = 30. ɔ: 30 indeholder 6 saa ofte som 5 indeholder Eenheden, nu spørges her hvor ofte 6 indeholdes i 30, eller hvorofte 6 kan trækkes fra 30, intet er da klarere, end at naar 30 frembringes ved 5 Gange at igientage 6, saa maae ogsaa 6 kunde trækkes 5 Gange fra 30, og 5 er da den søgte Qvotient.

Er Dividenden et høiere Tal, men Divisor et af de enkelte Tal, iværksættes Divisionen ved at opløse Dividenden i Dele, dividere hver Deel for sig, og siden addere partial Qvotienterne. f. Ex. 6369 : 3 nu er 6369 = 6000 + 300 + 60 + 9, først prøves nu hvor ofte 3 indholdes i 6000, men da 6000 er = 6 × 1000 og 3 indeholdes 2 Gange i 6, saa følger at det i 6000 indeholder 2000 Gange, i 300 paa samme Maade 100 Gang, og i 60, 20 Gange og endelig i 9, 3 Gange.

Partial Qvotienterne 2000 + 100 + 20 + 3, som sammenlagte udgiøre den egentlige te Qvotient = 2123.

Efter det decadiske Tal-Systems Natur skeer dette lettere ved strax at hensætte Qvotienterne, da Stedet vil give dem deres Værdie, forrige Exempel vil da staae saaledes:

```
3)6369|2123
  6   |
 ---
   3
   3
  ---
    6
    6
   ---
     9
     9
    ---
     0
```

Man sætter Divisor foran, og ved en Streg skiller den fra Dividenden, som ligeledes med en Streg indsluttes fra høire Side, bag hvilken Qvotienten hensettes, nu begyndes med Divisionen fra venstre, og prøves hvor ofte 3 indeholdes i 6, af Tabellen veed man at det er 2 Gange, 2 hensættes paa den til Qvotienten bestemte Plads, og faaer ved det at de følgende Tal 1—2—3 ved Divisionens Fortsættelse henhættes paa høire Side deraf, den Værd af Tusinde, som det bør have, siden de 6 ikke vare Enere men Tusinder; og saaledes fortsættes med Hundreder, Tiere og Enere.

Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Tal, skeer Divisionen egentlig paa samme Maade, med nogle Forandringer som best oplyses ved et Par Exempler:

1) 233550 skal divideres med 54, opsættes saaledes:

```
54)233550|4325
   216
   ---
    175
    162
    ---
     135
     108
     ---
      270
      270
      ---
      ...
```

Først undersøges hvor ofte 54 indeholdes i 2, som ere 2 × 100000 det indeholdes ikke deri, og af den Classe bliver altsaa ingen i Qvotienten; derpaa prøves 54 i 23 men da 23 endnu er mindre end 54 kan det ikke indeholdes nogen Gang deri, og af den Classe bliver følgelig i Qvotienten endnu ingen; man maae altsaa tage de 3 Zifre 233, og prøve hvor tit 54 deri indeholdes (i saadanne Tilfælde slutter man temmelig rigtig, men dog ikke altid, at saa ofte det første af Divisors Tal som her 5, indeholdes i de 2 første af Dvidenden som her 23, saa ofte indeholdes ogsaa de øvrige af Divisor i de øvrige dertil hørende af Dividenden) da nu 5 indeholdes 4 Gange i 23 saa tegnes 4 som Qvotient, derpaa multipliceres den hele Divisor med Qvotienten og Productet 216 skrives under de 3 første Tal af Dividenden og subtraheres derfra, der bliver da tilbage 17. Vi erfarede saaledes at 54 kan trækkes 4 Gange fra 233 og der bliver 17 tilbage, hvorfra 54 ikke kan subtraheres, men da de 233 ere Tusinder saa bliver de 4 i Qvotienten ogsaa

Tusin-

Tusinder, de 17 overblevne Tusinde anfees som 170 Hundrede og dertil føies de nu nedflyttede 5, og jeg spørger nu: 54 i 175 hvilket findes, som nys er viist ved at see hvor tit 5 indeholdes i 17, nemlig 3 Gange, Tallet 3 tegnes nu i Qvotienten næst 4, og Divisor multipliceres nu med 3, og Produktet 162 subtraheres fra 175 hvorved erfares at 54 indeholdes 3 Gange i 175, og at der bliver 13 hvorfra de 54 ikke kan subtraheres, da de 175 vare Hundreder, bliver de 3 i Qvotienten ogsaa Hundreder, de 13 overblevne ansees som 130 Tiere og dertil legges de 5 nedflyttede, og nu spørges igien paa samme Maade, hvor ofte 54 indeholdes i 135, saaledes fortfares indtil alle Zifrene ere nedflyttede og Qvotienten funden at være, ingen Hundred Tusinder, ingen Titusinder, 4 Tusinder, 3 Hundreder, 2 Tiere og 5 Enere ɔ: 4325.

2) Lad være givet 7654 at dividere med 37, det opsættes og behandles som forrige Exempel:

Dog anmærkes at da jeg efter at have divideret Hundrederne og nedflyttet de 5 Tiere til de fra Hundrederne overblevne 2 som er 20 Tier, saa har jeg i alt 25 Tiere, da nu 25 er

```
37)7654|206
   74
   --
    25
    00
   ---
    254
    222
    ---
     32
```

min-

mindre end 37, kan 37 ikke indeholdes deri nogen Gang, det bemærkes i Qvotienten med et Nul, for at de øvrige Ziffre kan faae deres rigtige Plads og dermed forbundne Værd, 37 skulde nu multipliceres med 0 men at igientage en Størrelse ingen Gang giver intet til Produkt, og naar intet fradrages bliver det samme uforandret som før var, det var altsaa unyttigt at skrive de 2 Nuller og de udelades derfor i Almindelighed, da det Tal af næstfølgende Classe strax nedflyttes og Operationen igien begyndes. Efter nu at have divideret Eenerne, bliver en Rest af 32, som endnu skulde divideres med 37, ɔ: det skulde deles i saa mange Dele som Divisor har Eenheder, og een af disse tilføies Qvotienten; hvorledes dette skeer forklares siden ved Brøk-Regningen, her er det nok at sige, at man ved at skrive Qvotienten $206\frac{32}{37}$ viser at Divisionen ikke gandske er fuldført.

Naar Divisor bestaaer af 3, 4 eller flere Zifre, skeer Divisionen paa samme Maade som er viist med 2, og behøver ingen videre Forklaring.

§. 27.

Hvad §. 23 er anmærket angaaende Multiplicationen, det samme gielder og om Divisionen at den kan udføres naar Divisor kan opløses i Faktorer ved at dividere først med den ene Faktor,

og

og den da udkomne Qvotient igien med den anden Faktor, f. Ex. naar 576 skulde divideres med 12 ɔ: deles i 12 lige Dele, da skeer det ved at dele det først i 3 Dele, og hver af disse igien i 4, og følgelig forrettes Divisionen ved at dividere først med 3 og det da udkomne igien med 4, efterdi

$3 \times 4$ er $= 12$. $576 : 12 = 48$. og
$576 : 3 = 192$ men $192 : 4 = 48$.

Naar Dividenden lader sig opløse i Faktorer, da divideres den eene Faktor med Divisor og den da udkomne Qvotient multipliceres med den anden Faktor f. Ex. $48 : 3 = 16$, nu er $48 = 6 \times 8$ og $6 : 3 = 2$, denne Qvotient 2 multipliceres med den Faktor 8, og der udkommer da 16, som er den søgte Qvotient.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: jeg vil i det anførte Exempel vide hvor ofte 3 indeholdes i 48, da nu 48 er $= 6 \times 8$, saa følger at 3 maae indholdes 8 Gange saa ofte i 48 som det indeholdes i 6, da det nu indeholdes i 6 to Gange, saa maae det indeholdes $8 \times 2 =$ 16 Gange i $8 \times 6 = 48$.

Af det nu om Multiplicationen og Divisionen forklarede insees let, at naar et Produkt divideres med den eene Faktor, udkommer den anden som Qvotient; og naar Qvotienten multipliceres med Divisor udkommer Dividenden. Multiplication

og

og Division tiene derfor til at prøve hinanden, og ere modsatte Regnings-Arter.

At dividere benævnte Tal, skeer aldeles paa samme Maade, som om de ubenævnte er forklaret, naar kun, som ved de forrige Regnings-Arter er anmærket, Forholdet af de forskiellige Størrelser er bekiendt, et eeneste Exempel vil være nok, der forlanges at 3846 Rd. 3 ℔ 12 ß skal deles i fire lige Dele ɔ: divideres med 4.

4] 3846 Rd. 3 ℔ 12 ß
961 Rd. 3 ℔ 15 ß.

Divisionen begyndes med Rigsdalerne, og efter de i foregaaende § forklarede Methoder, findes at 4 indeholdes 961 Gange i de givne Rigsdalere, men at der bliver to tilovers hvori fire ikke indeholdes, disse 2 Rigsdaler opløses til Mark, og lægges til de 3 som vare givne, nu divideres de 15 Mark med 4, der bliver 3 til Qvotient og 3 ℔ tilovers som giøres til Skillinger, disse legges til de 12, og de da udkomne 60 ß divideres med 4, hvorvedder udkommer 15 ß.

Anmærk. Naar Divisor og Dividenden bestaae af mange Zifre, er det fordeelagtigt ved Addition at søge det todobbelte, tredobbelte, firdobbelte &c. af Divisor, da man ved at sammenligne disse Produkter af Divisor med de forskiellige Dele af Dividenden let vil finde Qvotienten f. Ex.

1 Gang

```
1 Gang) 4523          4523)2457237348|5432
        4523               22615     | 76
2 Gang) 9046               19573
3 — )13569                 18092
4 — )18092                  14817
5 — )22615                  13569
6 — )27138                   12483
7 — )31661                    9046
8 — )36184                   34374
9 — )40707                   31661
                              27138
                              27138
                              ;   ;
```

Naar mau nu som her er skeet ved Addition har fundet det toddobbete o. s. v. til det nidobbelte Produkt af Divisoren, saa sammenligner man de første 5 Zifre af Dividenden med disse forskiellige Produkter af Divisor, og seer da at det femdobbelte er det høieste der kan trækkes derfra, fem er da det første Ziffer i Qvotienten, efter at dette femdobbelte er subtrahert, og det følgende Ziffer 3 er nedflyttet, eftersøges, hvilken af Divisors Produkter, der nærmer sig meest til det Tal 19573 der nu skal divideres, og man finder da at det er det firdobbelte, som da hensættes og subtraheres derfra, o. s. f.

§. 28.

Naar et heelt Tal lader sig ved et andet Tal saaledes dividere, at intet bliver tilovers, og at

føl-

følgelig Qvotienten efter § 26 ogsaa er et heelt Tal, saa siges Dividenden at være et deeligt Tal og Divisor og Qvotienten ere dets aliqvote Dele. Et Tal derimod, som ikke lader sig ved noget andet Tal saaledes dividere, kaldes et prim-Tal (udeeligt Tal). Den største Divisor (aliqvote Deel) for et heelt Tal er Tallet selv; naar altsaa et Tal er en aliqvot Deel af et andet, er det tillige den største fælles Divisor eller det største fælles Maal for dem begge; Tal som have et fælles Maal, siges at være indbyrdes delelige, de Tal, som hver for sig selv ere delelige, men intet fælles Maal have, kaldes indbyrdes prim Tal.

Den største fælles Divisor (fælles Maal) for tvende Tal findes paa følgende Maade:

Det større af de givne Tal divideres med det mindre, det da overblevne bruges som Divisor, og dermed divideres den forrige Divisor indtil det enten gaar op, da den sidste brugte Divisor er Tallenes største fælles Maal, eller og der tilsidst bliver een tilovers, som viser at Tallene intet fælles Maal have, og følgelig ere Prim-Tal, f. Ex. Tallene 10051 og 966 være givne, hvis største fælles Maal man vil finde, man gaar da frem saaledes:

966

```
966)10051|10
    966  |
    391)966|2
        782|
        184)391|2
            368|
             23)184|8
                184|
```

23 er da den største fælles Divisor: Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees let: 23 findes at gaae op i 184, altsaa og i $2 \times 184 + 23$ (conf. § 26 og 27) $= 391$, følgelig og i $2 \times 391 + 184 = 966$, og endelig naar det gaaer op i 966 gaaer det og op i $10 \times 966 = 9660$, og da det forhen var beviist at gaae op i 391 maae det og gaae op i $9660 + 391 = 10051$, hvilket kan saaledes let oversees:

$$10051 = 10 \times 966 + 391$$
$$966 = 2 \times 391 + 184$$
$$391 = 2 \times 184 + 23$$
$$184 = 8 \times 23.$$

## Om Brøk i Almindelighed, og de fire Regnings-Arter med Brøk.

§. 29.

En Brøk er een eller flere af en Eenheds ligestore Dele. Naar altsaa et Heelt deles i et vist Antal

af lige Dele, og af disse tages een eller nogle, saa har man en Brøk, eller et brudet Tal; som skrives med to Tal-Zifre saaledes: $\frac{2}{3}$ og læses to tredie Dele. Nævner kaldes det Tal, som tilkiendegiver Delenes Beskaffenhed, eller siger hvor mange Dele det Hele er deelt i, som her Tallet 3. Tæller det, som tilkiendegiver Delenes Tal i det nærværende Tilfælde, eller viser, hvor mange af de ligestore Dele der ere tagne, som i den nævnte Brøk Tallet 2. Af denne Forklaring følger:

1) At enhver Brøk kan ansees som en Qvotient, frembragt ved at dividere Tælleren med Nævneren f. Ex. $\frac{4}{5}$ betegner at en Eenhed er deelt i 5 ligestore Dele, hvoraf tages 4, og følgelig $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$, men naar 4 skal divideres med 5 ɔ: undersøges hvor ofte 5 indeholdes i 4, da opløses efter § 27, 4 i $4 \times 1$, i 1 indeholdes 5 $\frac{1}{5}$ Gang, og altsaa i $4 \times 1$, $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ Gang. Enhver Division kan derfor udtrykkes som Brøk, og i Steden for at skrive 20 : 5, skrives $\frac{20}{5}$.

2) Ved benævnte Tal, kan ethvert Tal som betegner en ringere Sort af Størrelser, ansees som en Brøk af den høiere Sort, hvorunder det indbefattes; f. Ex. 2 Mark er $= \frac{2}{6}$ Rigsdaler, 8 ß er $= \frac{8}{16}$ Mark, thi da een Rigsdaler er 6 Mark en Marken jo $\frac{1}{6}$ Rd., og følgelig 2 Mk. $= \frac{2}{6}$ &c.

3) Brøken kan ansees som et Tal, thi, skiøndt den ikke indeholder en Mængde af hele Eenheder, saa indeholder den dog en Mængde af den hele Eenheds lige store Dele, der her kan ansees som Eenheder. Nævneren bestemmer allene af hvad Art de Dele ere, som Tælleren opregner, Brøken kan derfor ansees som et benævnt Tal.

4) Ere Tæller og Nævner lige store, da er Brøkens Værdi det samme som den hele Eenheds; thi tænker man sig et Heelt deelt i et vist Antal af lige Dele, som Nævneren bestemmer, og jeg tager alle disse Dele, hvilket maae skee naar Tælleren er samme Tal som Nævneren, faaer jeg upaatvivleligt det Hele, f. Ex. $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7} = 1$. Man kan endog tage flere Dele, end der gaae paa een Eenhed, og i saa Tilfælde bliver Tælleren større end Nævneren f. Ex. $\frac{12}{7}$ her tænkes et Heelt deelt i 7 Dele, og af disse Dele skal tages 12, jeg maae altsaa for at kunde dette, tænke mig endnu en Eenhed af samme Slags ligeledes deelt, og Brøken $\frac{12}{7}$ er da det samme som $1 + \frac{5}{7}$. Saadanne Brøk, hvor Tælleren enten er ligestor med Nævneren eller endog større, kaldes uegentlige, uægte Brøk (fractiones spuriæ, impropriæ). De forvandles ved at dividere Tælleren med Nævneren, enten gandske til hele Tal eller til hele og brudne (blandede) Tal.

Naar Tælleren derimod er mindre end Nævneren, kaldes Brøken ægte eller egentlig (propria, genuina).

§. 30.

En Brøks Værd formeres, naar dens Tæller giøres større eller Nævneren mindre; og formindskes naar Tælleren giøres mindre eller Nævneren større.

Beviis: Jo flere af samme Slags Dele der tages, jo større et heelt maae nødvendig erholdes, da nu Tælleren bestemmer Antallet af Delene, saa følger, at naar den forhøies, skal et større Antal af samme Dele tages, og altsaa er Værdien formeret f. Ex. $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$ thi af de lige store Dele tages nu 7 i steden for 4, da nu $7 > 4$ saa er $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$. Ved en mindre Nævner tilkiendegives at det hele skal deles i færre Dele; men deraf følger, at Delene selv maae blive større; og naar jeg nu af disse større Dele tager ligesaa mange som før af de mindre; maae nødvendig det da udbragte være større end tilforn f. Ex. $\frac{2}{3} > \frac{2}{12}$ thi den Ting, der før var deelt i 12 Dele, er nu kun deelt i 3, og følgelig hver Deel 4re Gange saa stor. Ligeledes indsees, at naar Tælleren bliver mindre, det er, færre af de samme Dele tages, bliver Værdien mindre; og naar Nævneren bliver større ɔ: det

det Hele deles i flere Dele, blive Delene mindre, og naar nu Antallet ikke forøges, bliver Værdien følgelig formindsket. Heraf følger:

1) At naar en Brøks Tæller bliver multipliceret eller Nævneren divideret med et heelt Tal, bliver Brøkens Værdi saa mange Gange forstørret, som Tallet indeholder Eenheder, f. Ex.

$\frac{8}{9} = 4 \times \frac{2}{9}$ thi 8 er $= 4 \times 2$

$\frac{2}{3} = 4 \times \frac{2}{12}$ thi $3 = 12 : 4$.

2) At naar Tælleren bliver divideret, eller Nævneren multipliceret med et heelt Tal, bliver Brøkens Værdi saa mange Gange mindre, som Tallet indeholder Eenheder.

3) At en Brøk kan multipliceres med et heelt Tal paa to Maader: enten ved at multiplicere Tælleren eller dividere Nævneren med det givne Tal; ligeledes kan den divideres med et givet heelt Tal paa 2 Maader: enten ved at dividere Tælleren, eller ved at multiplicere Nævneren dermed.

4) At Brøkens Værdi bliver uforandret naar dens Tæller og Nævner multipliceres eller divideres med et og samme Tal; thi i det Tælleren multipliceres, formeres Brøkens Værdi saa mange Gange som Tallet hvormed den multipliceres indeholder Eenheder, og naar Nævneren multipliceres med samme Tal, bliver den paa samme Maade formindsket, og følgelig ligemeget baade formeret og

for

formindsket og altsaa uforandret. Ved at dividere Tæller og Nævner med et og samme Tal, skeer Formerelsen og Formindskelsen ligeledes i samme Grad.

§. 31.

At forkorte en Brøk, er at udtrykke den samme Værd i, eller samme Deel af det Hele med ringere Tal: dette skeer ved at dividere Brøkens Tæller og Nævner med samme hele Tal; thi da Qvotienten maae i Følge § 25 altid blive mindre end Dividenden, saalænge Divisor er et heelt Tal, saa maae der ved denne Division udkomme mindre Tal til Tæller og Nævner, og i Følge foregaaende § bliver Værdien den samme, og Forkortningen er skeet f. Exempel,

$$\frac{12}{20} = \frac{12 : 4}{20 : 4} = \frac{3}{5}$$

Alle Brøk hvis Tæller og Nævner ere indbyrdes delelige Tal, kan altsaa forkortes ved at divideres med en af deres fælles Divisorer, og saa meget muligt, ved at divideres med deres største fælles Divisor, der søges efter § 28, ere de derimod indbyrdes Prim-Tal, finder ingen Forkortning Sted. Ved at opløse saavel Tæller som Nævner i Faktorer, og udslette de, som da findes i begge, kan Forkortningen og skee f. Ex. $\frac{32}{120} = \frac{4 \times 8}{8 \times 15} = \frac{4}{15}$.

Anm.

Anmærk. Naar man til et givet Tal 430 vil finde Faktorerne, saavel de enkelte som selv ere Prim-Tal, som de sammensatte, der ere komne ved at multiplicere de enkelte med hinanden, eller med, sammensatte da skeer det saaledes:

| | |
|---|---|
| 430 | 2 |
| 215 | 5—10 |
| 43 | 43 · 86 · 215 · 430 |

Man dividerer Tallet med den mindst muelige Faktor, som her 2, og sætter den ved høire Side af Tallet, som skilles derfra ved en perpendiculair Streg, Qvotienten 215 sættes under Tallet selv, derpaa divideres 215 med sin mindste Faktor 5 der tegnes paa høire Side af Stregen under den forrige Faktor 2, Qvotienten 43 tegnes under Tallet, 43 er et prim-Tal, og kan ikke divideres, de Tal paa høire Side af Stregen ere nu de enkelte Faktorer, og de som ved at multiplicere dem med hinanden kan frembringes, ere de sammensatte.

§. 32.

Da Nævneren bestemmer Brøkens Art, og i Følge § 16, allene ligeartede Størrelser kan adderes, saa følger at allene de Brøk er som have eens Nævnere kan adderes, og at det for at foretage Addition med Brøker er nødvendigt, at kunde bringe forskiellige Brøk til eens Benævning ɔ: forandre dem, saa at de have samme Nævner, uden at deres Værd er enten formeret eller formindsket, dette skeer:

a) ved at multiplicere alle de givne Brøks Nævnere med hinanden

b) ved

b) ved at multiplicere enhver af Tællerne med det samme Tal, hvormed dens Nævner er multipliceret, f. Ex. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ bringes saaledes til eens Benævning:

$$\frac{2 \times (4 \times 7)}{3 \times (4 \times 7)} = \frac{56}{84}$$

$$\frac{3 \times (3 \times 7)}{4 \times (3 \times 7)} = \frac{63}{84}$$

$$\frac{5 \times (3 \times 4)}{7 \times (3 \times 4)} = \frac{60}{84}$$

Ved at multiplicere Nævnerne, erholdes samme Nævner overalt (da samme Faktorer altid give samme Produkt) som kaldes en fælles Nævner; men da Brøkens Værdi derved er efter § 30 bleven formindsket, saa maae, for at erstatte dette, enhver Tæller multipliceres med det samme Tal, da Værdien saaledes er (see § 30) aldeles uforandret. Denne Maade at søge en fælles Nævner, vil, naar de givne Brøk ere mange og høie, blive vidtløftig, og den fundne Nævner et meget høit Tal.

Til Lettelse i den praktiske Regning, betiener man sig derfor af følgende Methode: Man opløser alle Nævnerne i deres enkelte Faktorer, multiplicerer disse med hinanden, og finder saaledes et Tal, hvori alle Nævnerne kan gaae op. Dette

anſees

ansees som en fælles Nævner, og nu undersøges ved Division, hvor ofte enhver af de givne Nævnere indeholdes i den fundne fælles Nævner, og med de ved denne Division fundne Qvotienter multipliceres Tællerne f. Ex.

| | | 120 fælles Nævner | |
|---|---|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | 40 | 80 | $= \frac{80}{120}$ |
| $\frac{5}{12}$ | 10 | 50 | $= \frac{50}{120}$ |
| $\frac{11}{20}$ | 6 | 66 | $= \frac{66}{120}$ |
| $\frac{7}{8}$ | 15 | 105 | $= \frac{105}{120}$ |
| $\frac{1}{4}$ | 30 | 30 | $= \frac{30}{120}$ |
| $\frac{13}{24}$ | 5 | 65 | $= \frac{65}{120}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3) | 3 | 12 | 20 | 8 | 4 | 24 |
| 4) | 1 | 4 | 20 | 8 | 4 | 8 |
| 2) | 1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 2 |
| | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 |

enkelte Faktorer

$$3 \times 4 \times 2 \times 5 = 120$$

Rigtigheden af denne Fremgangs-Maade indsees let, ved Division findes de enkelte Faktorer af alle Nævnerne her at være 3, 4, 2, 5, disse multiplicerede, give Produktet 120, hvori ikke blot de enkelte men og de af dem sammensatte Faktorer maae gaae op. Nu findes ved Division med den første Brøks Nævner 3, at den indeholdes 40 Gange i fælles Nævneren, Tælleren 2 multipliceres nu med 40, for at Brøkens Værdie ikke skal

for-

forandres, og Brøken $\frac{80}{120}$ er $= \frac{2}{3}$, og saaledes med alle de øvrige Brøker. Ere de givne Brøkers Nævnere alle indbyrdes Prim-Tal, kan denne Maade ikke bruges.

§. 33.

Ere Brøkerne efter forrige § bragte til eens Benævning, da skeer Addition og Subtraction, blot ved at Tællerne adderes og subtraheres, da Nævnerne blive gandske uforandrede; thi da Brøker kan ansees som benævnte Tal, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa kan disse ligesaa lidet adderes eller subtraheres, som ved benævnte Tal de Ord, der bestemme Størrelsernes Art f. Ex. Rigsdaler, Pund, Lod ꝛc. Saaledes er Summen af $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$, af $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ som efter forrige § ere $= \frac{56}{84} + \frac{63}{84} + \frac{60}{84} = \frac{179}{84}$ som er en uegentlig Brøk (see § 29) og $= 2\frac{11}{84}$.

Differencen findes ligeledes: f. Ex. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (§ 31). I det Tilfælde at der i Minuenden er Heele og Brøk, og Brøken i Subtrahenden er større end i Minuenden, da maae der laanes en Heel, som efter Brøkens Natur er saa mange Dele som Nævneren angiver f. Ex. at subtrahere $4\frac{4}{5}$ fra $8\frac{3}{7}$ skeer saaledes:

$$8\frac{3\times5=15}{7\times5=35}$$
$$8\frac{4\times3=28}{5\times7=35}$$
$$3\tfrac{12}{35}$$

efterat Brøkerne her ere bragte til eens Benævning, skulde jeg subtrahere $\frac{28}{35}$ fra $\frac{15}{35}$ eller 28 fra 15, jeg laaner da een af de 8 Hele, som er $\frac{35}{35}$ disse legges til de $\frac{15}{35}$, og udkomme da $\frac{50}{35}$, nu subtraheres 28 fra 50, og den da fundne Difference 12 er Tæller for den søgte Brøk som er $\frac{12}{35}$ siden subtraheres de hele, som forhen er viist.

## §. 34.

At multiplicere et heelt Tal med en Brøk, er efter § 21, at igientage saa stor en Deel af det hele Tal som Brøken er af Eenheden: v. dele det givne Tal i saa mange lige store Dele, som Nævneren angiver, og tage deraf saa mange som der ere Eenheder i Tælleren. Det skeer ved at dividere det givne Tal med Brøkens Nævner og multiplicere det med dens Tæller, eller i en omvendt Orden f. Ex. $20 \times \frac{3}{4}$ $(20 : 4) \times 3 = 5 \times 3 = 15$. Thi at multiplicere $20 \times \frac{3}{4}$ er at igientage de $\frac{3}{4}$ af 20, jeg deler først 20 i fire Dele ved at dividere med 4, og af disse Fierdedele tages 3 som skeer ved at multiplicere 5 med 3. Forlanges derimod at $\frac{3}{4}$ skal multipliceres med 20 ɔ: igientages 20 Gange, da skeer det (§ 30, 3.) ved at multi-

plicere

plicere Tælleren 3 med 20, og man faaer da $\frac{60}{4}$ som er en uegentlig Brøk = 15. Da det samme Produkt saaledes erholdes ved at multiplicere baade 20 med $\frac{3}{4}$, og $\frac{3}{4}$ med 20, saa har følgelig Faktorernes Orden ingen Indflydelse paa Produktet. Videre indsees, at Produktet, som fremkommer, naar et Tal multipliceres med en egentlig Brøk, altid bliver mindre end Multiplicanden; thi det er ikke en blot Multiplication, men en sammensat Regning, da der først divideres med Nævneren og siden multipliceres med Tælleren; saa længe altsaa Tælleren er mindre end Nævneren (hvilket er Tilfældet i alle egentlige Brøk) vil Produktet blive mindre end Multiplicanden; at multiplicere et Tal med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ er følgelig ikke andet end at dividere Tallet med 2, 3, 4, thi da 1 giør ingen Multiplication, behøver det ikke at skee.

§. 35.

Brøk multipliceres med Brøk, naar Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner, f. Ex. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ thi at multiplicere med $\frac{2}{5}$ er efter forrige § at igientage de to femte Dele af den givne Størrelse, og skeer ved at dividere med 5 og multiplicere med 2, naar jeg nu multiplicerer Nævneren 4 med Nævneren 5, bliver Brøken $\frac{3}{4}$ virkelig divideret med 5 (§ 30. 3)

og

og i det Tællerne multipliceres, bliver den ligeledes multipliceret med 2, og altsaa Multiplicationen rigtig fuldført.

Skal blandede Tal multipliceres med hinanden, forandres de beqvemt til uegentlige Brøk og multipliceres da paa den nyelig forklarede Maade. f. Ex. $3\frac{1}{4} \times 5\frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{221}{12} = 18\frac{5}{12}$. Er Multiplicanden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Zifre, er det beqvemmere at lade den blive uforandret, og blot giøre Multiplicator til en uegentlig Brøk og da efter forrige § dividere med dens Nævner og multiplicere med Tælleren f. Ex.

$$3)212\tfrac{3}{4} \times 5\tfrac{1}{3} \cdot 5\tfrac{1}{3} = \tfrac{16}{3}$$

$$\begin{array}{r} 70\frac{11}{12} \\ 16 \\ \hline 1134\frac{2}{3} \end{array}$$

Multiplicationen skeer ogsaa rigtig naar der først multipliceres med Multiplicators hele Tal og derpaa med Brøken, og partial Produkterne derefter adderes som i det anførte Exempel saaledes:

$$\begin{array}{rl} 212\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} & \\ 5 & \\ & 12 \\ \hline 1063\frac{3}{4} & = 9 \\ 70\frac{11}{12} & = 11 \\ \hline 1134\frac{2}{3} & \end{array}$$

§. 36.

## §. 36.

At dividere en Brøk med et heelt Tal, eller at dele den i et vist Antal lige Dele er forklaret § 30, 3. Her skal altsaa allene læres: Hvorledes Divisionen skeer, naar Dividenden er et heelt Tal og Divisor en Brøk; og naar baade Dividenden og Divisor ere Brøk. Det første er efter den paa Division § 25 givne Forklaring at see, hvor ofte Brøken indeholdes i det givne Tal, dette faaes at vide ved at multiplicere det givne Tal med Divisors Nævner og dividere det udkomne med dens Tæller f. Ex.

$$\begin{array}{r} 20 : \frac{4}{5} \\ 5 \\ \hline 4)\,100 \\ \hline 25 \end{array}$$

Beviis: Her spørges, hvor ofte $\frac{4}{5}$ indeholdes i 20, nu er $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$, jeg undersøger derfor først, hvor ofte $\frac{1}{5}$ indeholdes i 20, ved at multiplicere 20 med 5; thi da $\frac{1}{5}$ er fem Gange mindre end Eenheden, og Eenheden indeholdes tyve Gange i 20, maae $\frac{1}{5}$ indeholdes deri fem Gange saa ofte, nemlig 100 Gange. Men jo større et Tal er, jo færre Gange maae det kunde indeholdes i et andet Tal, $\frac{4}{5}$ kan altsaa ikke indeholdes i 20, saa ofte som $\frac{1}{5}$, men kun fierde Parten saa mange Gange, det ved Multiplicationen udkomne Produkt 100, maae derfor igien divideres med 4, og den da udkomne Qvotient 25 viser hvor ofte $\frac{4}{5}$ kan indeholdes i 20.

Heraf

Herafindsees at ved at dividere med en egentlig Brøk, udkommer bestandig en Qvotient, som er større end Dividenden, hvilket videre forklares af samme Grund, som ved Multiplicationen er anført § 34. At dividere med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ꝛc. er følgelig intet andet end at multiplicere med 2, 3, 4. f. Ex. $20 : \frac{1}{2} = 20 \times 2 = 40$. $15 : \frac{1}{3} = 15 \times 3 = 45$. $12 : \frac{1}{4} = 12 \times 4 = 48$.

§. 37.

Brøk divideres med Brøk, naar Dividenden multipliceres med Divisors Nævner og divideres med dens Tæller, hvilket skeer naar Divisors Tæller og Nævner omsættes, og Dividenden dermed multipliceres f. Ex. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Beviis: Spørgsmaalet ved at dividere Brøk med Brøk, er at see hvor ofte den eene Brøk som i det anførte Exempel $\frac{4}{5}$, indeholdes i den anden $\frac{2}{3}$; naar nu Dividenden $\frac{2}{3}$ multipliceres med den omsatte Divisor $\frac{5}{4}$, da bliver den derved multipliceret med Divisors Nævner og divideret med dens Tæller som just var det, der efter forrige § maatte skee, for at erfare hvor ofte Divisor indeholdtes i Dividenden.

Divisionen skeer ogsaa rigtig, naar Brøkerne bringes til eens Benævning, og deres

Tæl-

Tællere da blot divideres i hinanden f. Ex. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ er naar de bringes til eens Benævning efter § 32, $= \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; thi da Brøk med eens Nævner ere ligeartede Størrelser, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa maae nødvendig den eene indeholdes i den anden saa ofte som dens Tæller indeholdes i den andens; ligesom 3 ℔ indeholdes i 6 ℔ 2 Gange, saa maae og $\frac{3}{8}$ indeholdes i $\frac{6}{8}$ 2 Gange, eller saa ofte som 3 indeholdes i 6.

Blandede Tal divideres med hinanden, ved at forvandles til uegentlige Brøk, og da behandles paa den nylig forklarede Maade, f. Ex. $2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$. Er Dividenden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Zifre, da indrettes allene Divisor til en uegentlig Brøk, og Divisionen skeer efter forrige §. f. Ex.

$$238\frac{4}{5} : 6\frac{1}{3} = 238\frac{4}{5} : \frac{19}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 19)\ 716\frac{2}{5} \\ \hline 37\frac{67}{95} \end{array}$$

Anmærk. Ved at dividere 716 med 19 blev tilovers 13, disse maae giøres til femte Dele for at kunde legges til $\frac{2}{5}$, der bliver da i alt $\frac{67}{5}$ som divideres med 19 ved at multiplicere Nævneren (see § 30, 3).

Grund-

## Grundsætninger (Axiomer).

§. 38.

De almindelige Grundsætninger, (§ 17) hvoraf de fleste Sandheder i Mathematiken udledes og bevises, hvor simple og fattelige de end ere, og hvor ofte de end i det daglige Liv anvendes, uden egentlig at kiendes, have dog for Begynderne et saa fremmet Udseende; at jeg har troet ikke at burde anføre dem førend her; da og først i det efterfølgende deres egentlige Anvendelse finder Sted. Følgende ere de vigtigste:

1) Et heelt er lige stort med alle dets Dele tilsammentagne Ex. 1 Rd. = 96 ß 18 = 8 + 5 + 2 + 3.

2) Et Heelt er større end enhver af dets Dele; og enhver Deel er mindre end det Hele. Ex. 1 Rd. > 1 ß. 18 > 8; 1 ß < 1 Rd. 5 < 18.

3) Lige store Størrelser kan sættes i Steden for hinanden Ex. 1 Rd. i Steden for 96 ß; 4 Qvarter for 1 Alen.

4) Naar lige store Størrelser formeres eller formindskes med lige store Størrelser, og paa samme Maade, bliver det udkommende lige.

Ex. ved Addition (§ 17).

$$\begin{array}{l} 8 = 5 + 3 \\ 4 = 4 \\ \hline 12 = 9 + 3 \end{array}$$

Multiplication (§ 21)

$$\begin{array}{l} 7 = 4 + 3 \\ 5 = 5 \\ \hline 35 = 20 + 15. \end{array}$$

Subtraction (§ 19)

$$\begin{array}{l} 7 = 4 + 3 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 = 2 + 3 \end{array}$$

Division (§ 25)

$$\begin{array}{l} 24 = 16 + 8 \\ 4 = 4 \\ \hline 6 = 4 + 2 \end{array}$$

5) Naar lige store Størrelser formeres eller formindskes ved ulige store Størrelser, er det udkommende ulige stort; ligeledes naar ulige Størrelser formeres eller formindskes ved lige store Størrelser.

Ex.

$$\begin{array}{l} 7 = 4 + 3 \\ 5 > 2 \\ \hline 12 > 6 + 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8 = 5 + 3 \\ 2 < 3 \\ \hline 6 > 2 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 5 + 3 \\ 2 < 3 \\ \hline 16 < 15 + 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20 = 12 + 8 \\ 5 > 4 \\ \hline 4 < 3 + 2 \end{array}$$

6) Naar to Størrelser ere lige store eller ligedanne med en tredie, da ere de indbyrdes lige store eller ligedanne:

Ex. 1 Rd. = 96 ß
6 Mk. = 96 ß

altsaa 1 Rd. = 6 ℔

7) Naar en Størrelse er større eller mindre end den eene af to lige store Størrelser, er den og større eller mindre end den anden.

Ex. $8 = 5 + 3$, nu er $9 > 8$, altsaa $9 > 5 + 3$.

## Om modsatte Størrelser.

§. 39.

Naar to Størrelser ere af den Art, at, naar de begge sammenlegges, den eene da bliver forøget med saa mange Eenheder, som den anden indeholder, kaldes de, Størrelser af samme Betingelse (qvanta ejusdem conditionis) eller kortere overeenstemmende Størrelser f. Ex. 100 Rdlr. Formue og 30 Rd. Formue. 100 Rd. Gield og 30 Rd. Gield. Ere derimod to Størrelser af den Art, at, naar de begge sammentages, den eene derved gandske forsvinder, og den anden bliver saa mange Eenheder mindre, som den første indeholder; saa kaldes de: Størrelser af modsat Betingelse (qvanta contrariæ conditionis) eller kortere modsatte Størrelser (qvanta contraria). Saadanne ere: Formue og Gield, Bevægelse fra

samme Punkt i modsat Direction, Stigen og Falden &c.

Man har vedtaget at betegne disse modsatte Størrelser med + og — og nævne dem bekræftende (positive) og nægtende (negative) saaledes at naar en vis Størrelse f. Ex. Formue betegnes med + betegnes dens modsatte, Gield med — saa at naar + 8 Rd. betyder en Formue af 8 Rdlr., betyder — 3 Rd. en Gield af 3 Rd. Dog er det almindelig vedtaget, at naar en bekræftende Størrelse, der skulde betegnes med +, enten staaer gandske allene eller i Begyndelsen af en Række, da udelades Tegnet. I sig selv ere alle Størrelser, for saavidt de ere noget, bekræftende og kan ikke kaldes nægtende uden i Sammenligning med andre. Det er derfor ligegyldigt hvilke Størrelser der gives Navn af bekræftende og nægtende, thi Formue er ligesaa vel en nægtende Størrelse naar det modsættes Gield, som Gield er nægtende naar det modsættes Formue. Ligeledes maae det forstaaes relativ (hensigtsmæssig) naar de nægtende Størrelser kaldes mindre end intet; thi kun for saavidt de modsættes de bekræftende, som ere mere end intet, kan de siges at være mindre end intet. Den, som uden at eie noget er 10 Rd. skyldig, hans Formue kan siges at være mindre end intet 0 — 10 Rd., thi sæt at ham gives 10 Rd., da vil jo de

10 Rd. Gield ophæve de bekomne 10 Rd., og hans Formue er = 0, men den er jo dog større nu end forend den Tilvæxt af de bekomne 10 Rd., den var altsaa fra Begyndelsen mindre end intet. I sig selv derimod (absolut) betragtet kan ingen Størrelse siges at være mindre end intet, thi Gield er saavel en virkelig Størrelse som Formue, og hvad der er noget, kan ikke tilligemed være intet, end sige mindre end intet. Man maa derfor tage sig i Agt, at man ikke ved Navnet positiv her tænker sig, det virkelig reelle, og ved negativ altsaa det, som ikke er noget reelt, positiv bekræftende betyder her intet andet, end den af to modsatte Størrelser, som ved en Undersøgelse egentlig er Hoved-Gienstanden; Og dog er det i de fleste Tilfælde vilkaarligt, hvilken af to modsatte vi vil ansee som Hoved-Gienstand.

Anmærk. Man kan derfor ansee enhver nægtende Størrelse, som noget der skal fradrages, og en bekræftende som noget der skal tillegges, hvilket formodentlig er Anledning til, at Tal, der i sig selv alle ere eensartede, ogsaa kan betragtes som modsatte Størrelser, naar man anseer det ene som en adderende, og det andet som en subtraherende, og derfor sætter foran hiin Additions Tegnet + og foran denne Subtractions-Tegnet —.

§. 40.

§. 40.

Hidindtil have vi udtrykt enhver Størrelses Forhold til en anden af samme Art, der kan ansees som Eenhed (hvilket i Almindelighed benævnes med Tal) ved de bekiendte Tal-Zifre. Alle Størrelser lade sig vel paa denne Maade udtrykke ved Tal; men for mere Almindeligheds Skyld, og for at kunde udtrykke Størrelsen som Tal endog naar Eenheden er ubestemt, betiener man sig af Bogstaver, især de smaa i det latinske Alphabet, og forestiller derved de forskiellige Mængder af forskiellige Eenheder. Man kalder den Regnekonst, hvori man betiener sig af disse almindelige Tegn, almindelig Regnekonst eller Bogstav-Regning, ja vel og Algebra. Et Bogstav som et almindeligt Tegn kan betegne, saavel alle muelige Mængder, som Arter af Eenheder, f. Ex. *a* kan betyde 2 Rigsdaler 3 Borde rc. *b* ligeledes, det er altsaa vilkaarligt, hvilke Bogstaver man vælger, for at betegne visse Størrelser, men efter at have valgt dem, maa man, som let begribes, beholde de samme Bogstaver, til at betegne samme Størrelser under den hele Udførelse af den begyndte Regning.

Størrelser udtrykte ved forskiellige Bogstaver ere derfor at ansee som uligeartede, og kan allene adderes og subtraheres formedelst de os allerede

rede bekiendte Tegn f. Ex. $a$ og $b$ er $= a + b$ og Differencen af $a$ og $b$ er $= a - b$.

Da Bogstaver betragtede som Multiplicatorer og altsaa som Tal (§ 21) tilkiendegive en ubestemt Mængde Eenheder, saa følge at Multiplicationen heller ikke anderledes kan skee, thi at multiplicere $a$ med $b$ er at igientage Størrelsen $a$, $b$ Gange, men da $b$, kan betegne forskiellige Mængder af Eenheder skeer Igientagelsen ikke, men tilkiendegives at den skal skee, ved at skrive $a \times b$.

Anmærk. Efter en almindelig Vedtægt udelades Multiplications-Tegnet imellem Bogstaver, og de skrives tæt op til hinanden, saaledes er $ab = a \times b$, $aa = a \times a$.

Ved Divisionen finder det samme Sted, og den skeer ved Hielp af Tegnet, eller ved at udtrykke Qvotienten som Brøk f. Ex. at $a$ skal divideres med $b$, det er deles i $b$ lige Dele, lader sig ikke iværksætte, da det er ubestemt hvad Mængde af Eenheder $b$ betegner: det tilkiendegives derfor blot, at Delingen skal skee, ved at skrive $a : b$ eller $\frac{a}{b}$.

Saadanne med Bogstaver udtrykte Størrelser kan forbindes med Tal-Zifre enten formedelst Tegnene $+$ og $-$ f. Ex. $a + 8$; $9 + x$, $b - 7$; eller og uden Tegn, da Tallene enten sættes umiddelbar foran Bogstaverne som $7a$, $8b$, $9c$ de faa da Navn af Coefficienter, og angive, at Bogstaverne

derne dermed ere multiplicerede f. Ex. $7a$ er $= 7 \times 1a = 7 \times a$; eller og ved den øverste Kant af Bogstavets høire Side, som $a^2$, $b^3$, disse Tal kaldes Exponenter, og betegne at Bogstav-Størrelsen skal multipliceres med sig selv saa mange Gange som Exponenten indeholder Eenheder f. Ex. $a^3 = a \times a \times a$, $b^2 = b \times b$.

Anmærk. Naar Coefficienten eller Exponenten er 1, udelades den saaledes er $a = 1a$, $b = b^1$.

§. 41.

Modsatte Størrelser, betragtede som saadanne, kan ikke være ligeartede, da de efter § 39 ikke ere overeensstemmende; de kan altsaa egentlig ikke adderes (see § 16) og den udbragte Sum er ikke et Heelt, hvis Dele de summerende Størrelser ere. F. Ex. naar 100 Rd. Formue og 30 Rd. Gield adderes, saa er Summen 70 Rd. Formue, men 100 Rd. Formue kan ikke ansees som en Deel af 70 Rd. Formue.

Naar altsaa modsatte Størrelser skal adderes eller sammenlignes i Henseende til Qvantiteten, saa maa de først ansees som ligeartede, og overeensstemmende; ere de da begge lige store, vil Summen blive = 0 (see definit. § 39) ere de derimod, som overeensstemmende betragtede, ulige, da skeer Additionen naar det modsatte af den mindre subtra-

traheres fra den større. F. Ex. 30 Rd. Formue + 100 Rd. Gield er = 100 Rd. Gield — 30 Rd. Gield = 70 Rd. Gield.

adder $\begin{Bmatrix} -100 \text{ Rd.} \\ +\ \ 30 \text{ Rd.} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} -100 \\ -\ \ 30 \end{matrix}\Big\}$ subtraher

$\overline{-\ 70} \qquad\qquad \overline{-\ 70}$

Summen af to modsatte Størrelser findes altsaa i Almindelighed, ved at subtrahere den mindre, modsat taget, fra den større; eller, som det og pleier at udtrykkes, ved at subtrahere den mindre fra den større og give det udkomne det Tegn, den største Størrelse havde.

Da alle bekræftende Størrelser, ere ligeartede, som og de nægtende, saa skeer deres Addition efter den § 17 forklarede Maade: f. Ex. 8 Rd. Formue + 3 Rd. Formue er = 11 Rdlr. Formue, ligeledes er 3 Rd. Giel + 4 Rd. Gield = 7 Rd. Gield.

Flere med + og — forbundne Størrelser udtrykte ved Tal og Bogstaver, vil nu altsaa let kunde adderes f. Ex.

$$\begin{array}{lrcl} \text{adder:} & 12 - 8 + 7 - 11 + 9 & = & 9 \\ & -\ 8 + 5 - 3 + 8 - 6 & = & -4 \\ & 7 - 4 + 2 - 7 + 5 & = & 3 \\ & -\ 3 + 2 - 8 + 4 - 2 & = & -7 \\ \hline & 8 - 5 - 2 - 6 + 6 & = & 1 \end{array}$$

I den første virtikale Rad samles de bekræftende Størrelser som udgiøre 19 og de nægtende der er $= - 11$ men 19 og $- 11$ adderede efter den nylig forklarede Regel, giver Summen $= 8$. o. s. f.

Den hele Sum reduceres paa samme Maade til et eeneste Tal, som her bliver $= 1$. Man kan og addere de horizontale Radder hver for sig, og siden samle partial Summerne, som da vil udgiøre det samme som de vertikale Raders Sum.

Et Exempel med Bogstav Størrelser:

Adder:
$$\begin{array}{rrrrrr} 3a & -4b & +5c & -2d & & \\ -2a & +2b & -3c & & +2f & \\ -4a & +3b & -4c & +d & & \\ & -7b & +c & & & -2g \\ \hline -3a & -6b & -c & -d & +2f & -2g \end{array}$$

Man ordner først Størrelserne, at de eensbenævnte komme lige under hinanden, derpaa adderes de efter de oven forklarede Regler; i det Tilfælde, at der ingen eensbenævnte Størrelser findes, da skeer Additionen blot ved at skrive Størrelserne med deres Tegn ved hinanden f. Ex.

$$\begin{array}{l} 2a + 3b + 4c \\ 3g - 2h - 3f - 2m \\ \hline 2a + 3b + 4c - 3f + 3g - 2h - 2m. \end{array}$$

§. 42.

Subtraction med modsatte Størrelser udtrykte ved Bogstaver og Tal skeer: naar Tegnene ved ethvert Led i Subtractor forandres til det modsatte, og Størrelserne derpaa efter forrige § adderes.

$$\begin{array}{rl} \text{Ex. fra} & 2a - 3b + 5c - 4d \\ \text{subtraher} & -a \pm b \mp c \pm d \\ \hline & a - 2b + 6c - 5d \end{array}$$

Rigtigheden af denne Regel indsees saaledes: Ved Subtraction søges en Størrelse, som lagt til Subtractor udgiør Minuenden; lad f. Ex. $5a$ være givne hvorfra — $3a$ skal subtraheres, saa søges en Størrelse som adderet til — $3a$ udgiør $5a$, denne erholdes just naar — $3a$ forandres efter Reglen til + $3a$ og derpaa adderes til $5a$, thi man faaer da $8a$ som adderet til — $3a$ efter § 41 giør $5a$. Eller maaskee tydeligere paa denne Maade; For at kunde subtrahere en given Størrelse fra en anden, er det nødvendigt at den sidste maa indrettes saaledes, at den første kan blive en Deel deraf, og Subtractionen da foretages f. Ex. fra $8a$ subtraher — $5a$, nu indrettes $8a$ ved at tilføie + $5a$ og — $5a$ saa at — $5a$ er en Deel deraf, saaledes:

$$8a = 8a + 5a - 5a$$
$$+5a = -5a$$
$$13a = 8a + 5a = 13a$$

Et andet Exempel. subtraher — 8 fra 12.

$$12 = 12 + 8 - 8$$
$$+8 = -8$$
$$20 = 12 + 8$$

§. 43.

Efter Multiplicationens Natur maa Multiplicator altid være et Tal (§. 21), der ere altsaa i Henseende til modsatte Størrelsers Multiplication at mærke følgende fire Tilfælde:

1) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, da er Productet bekræftende, f. Ex. $+a \times +m = +am$, $+7 \times +4 = +28$.

Thi Produktet kommer af Størrelsen $+7$ paa samme Maade som Tallet $+4$ kommer af Tallet 1 (§ 21), men da $+4$ kommer af $+1$ ved at lægge det til sig selv fire Gange, saa kommer Produktet ved at legge $+7$ til sig selv fire Gange, og er altsaa $+7+7+7+7 = +28$.

2) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, bliver Produktet nægtende,

de, f. Ex. $-a \times +m = -am$ — $7 \times +4 =$ $-28$.

Da Tallet $+4$ kommer af $+1$ ved at igientage det fire Gange, maa Produktet frembringes ved at tage Størrelsen $-7$ fire Gange, og følgelig være $= -28$.

3) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet nægtende, saaledes er $+a \times -m = -am$; $+7 \times -4 =$ $-28$.

At multiplicere $+7$ med $-4$, er at frembringe et Produkt af $+7$ paa samme Maade som $-4$ er kommet af $+1$. Nu er Tallet $-4$ kommet af Tallet $+1$, ved at at igientage det fire Gange og betragte Produktet som et subtraherende Tal; følgelig frembringes det forlangte Produkt ved at igientage $+7$ fire Gange, og ansee den udkomne bekræftende Størrelse $+28$ som subtraherende, hvilket er det samme som en negativ Størrelse betragtet adderende (§. 42).

4) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet bekræftende, f. Ex. $-7 \times -4 = +28$.

Tallet $-4$ kommer af $+1$, naar 1 multipliceres med 4 og det udkommende ansees som et subtraherende Tal, det søgte Produkt skal altsaa frembringes ved at igientage $-7$ fire Gange, og ansee

ansee det udkomne $-28$ som en subtraherende Størrelse, men $-28$ anseet som en subtraherende Størrelse er efter § 42 det samme som $+28$ anseet som en adderende.

Heraf indsees nu den almindelige Regel: **at ved at multiplicere bekræftende og nægtende Størrelser med bekræftende og nægtende Tal, faaer Produkter $+$, naar Faktorerne have eens Tegn, og $-$ naar de have forskiellige.**

Anmærk. Foruden det anførte Beviis lader denne Regel sig og saaledes oplyse, er det først stiftaaet, at $-5 \times +9$ giver $-45$ hvilket efter Multiplicationens Natur let indsees, da bevises at $-7 \times -5$ giver $+35$ saaledes:

efter den § 38, 4. anførte Grundsætning skal Producterne her blive lige men da $-5 \times +9$ giver, som antages for beviist $-45$, saa maa $-7 \times -5$ give $+35$, da de udkommende Produkter ellers ikke bleve lige store.

$$\begin{array}{rcr} -5 & = & -5 \\ 9-7 & = & 2 \\ \hline -45+35 & = & -10 \end{array}$$

§. 44.

Alle saavel med Tal som med Bogstaver udtrykte bekræftende og nægtende Størrelser, lade sig nu let multiplicere: Man multiplicerer nemlig enhver enkelt Størrelse i Multiplicanden med enhver enkelt i Multiplicator, saaledes at Tallene

vir-

virkelig multipliceres, og Bogstaverne skrives uden Tegn ved hinanden (§ 40), for ethvert Produkt sættes Tegnet + eller — efter § 43. Disse enkelte Produkter adderes derpaa til sammen. f. Ex.

a) med Tal:

$$\begin{array}{r} 12 - 8 + 7 - 6 = 5 \\ 7 - 4 = 3 \\ \hline 84 - 56 + 49 - 42 \quad 15 \\ -48 + 32 - 28 + 24 \\ \hline 36 - 24 + 21 - 18 = 15. \end{array}$$

b) med Bogstaver:

No. 1.

$$\begin{array}{l} a - x + y \\ \quad\quad b \\ \hline ab - bx + by \end{array}$$

No. 2.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 \text{ v. } aa + ab \\ \quad\quad ab + b^2 \text{ v. } bb \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

No. 3.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

No. 4.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

**Anmærk.** Da Bogstaver kan udtrykke alle mulige Størrelser, saa kan ved $a + b$ betegnes Summen af ethvert Par Størrelser, eller enhver Størrelse der bestaaer af 2 Dele (binomium) og altsaa er det udkomne Produkt $a^2 + 2ab + b^2$ et almindeligt Udtryk for Produktet af ethver binomisk Størrelse multipliceret med sig selv. Ligeledes kan $a - b$ ansees som Differencen af ethvert Par Størrelser og $a^2 - 2ab + b^2$ som en almindelig Form for Produktet, naar Differencen af 2 Størrelser multipliceres med sig selv. Ex. No. 4. giver ogsaa en almindelig Regel, at naar $a + b$ (Summen af to Størrelser) multipliceres med $(a - b)$ (Differencen af de samme) udkommer $a^2 - b^2$ (den første multipliceret med sig selv mindre end den anden ligeledes multipliceret med sig selv) om Anvendelsen af disse Sætninger vil i det følgende tales videre.

c) Med Tal og Bogstaver.

$$\begin{array}{r} 8b - 4a + 3ac - 4g \\ 2a + 3b \\ \hline 16ab - 8a^2 + 6a^2c - 8ag \\ 24b^2 - 12ab + 9abc - 12bg \\ \hline 24b^2 + 4ab - 8a^2 + 6a^2c + 9abc - 8ag \\ - 12bg \end{array}$$

§. 45.

Division med modsatte Størrelser, skeer som med absolute Størrelser efter § 22, og i Henseen-

de

de til Tegnene følges denne Regel: at naar Dividenden og Divisor have eens Tegn ɔ: ere begge bekræftende eller begge nægtende, faaer Qvotienten + eller bliver bekræftende; have derimod Dividend og Divisor forskiellige Tegn faaer Qvotienten —, eller bliver nægtende. Da Dividend, Divisor, Qvotient og Eenheden, have samme Forhold til hverandre som Produkt, Multiplicand, Multiplicator og Eenheden (§ 27), saa følger, at det § 43 for Multiplications-Reglen førte Beviis, med den nødvendige Omsætning tillige kan anvendes her.

Angaaende Bogstav-Størrelserne da er § 40 allerede erindret, at naar de ere forskiellige, Divisionen da skeer allene ved Hielp af Tegn; men forekommer samme Bogstav som Faktor baade i Dividend og Divisor da hæve de hinanden, f. Ex. $ab : a = \frac{ab}{a} = b$. Udtrykket $ab$ betegner, at Størrelsen $b$ er igientagen et vist Antal Gange, som udtrykkes ved $a$, naar den nu skal divideres med $a$, det er, deles i saa mange lige store Dele, som $a$ tilkiendegiver, saa følger, at Qvotienten bliver $b$ (§ 27), ligeledes er $a^2 : a = aa : a = a$. $cd : c = d$.

## §. 46.

Er enten Dividenden en sammensat Størrelse, og Divisor et enkelt Tal; eller baade Divi-

denden og Divisor sammensatte Tal, da skeer Divisionen efter samme Fremgangsmaade som § 25 om hele Tals Division er forklaret; naar tillige erindres, hvad i foregaaende § i Henseende til Tegnene, og Bogstav-Størrelserne er anmærket. Begge Tilfælde oplyses ved følgende Exempler:

*a.* Naar Dividenden allene er en sammensat Størrelse, f. Ex $(ab - ac + ad) : a$, opsættes saaledes:

$$a)\ ab - ac + ad \mid b - c + d$$
$$-\, ab$$
$$- ac$$
$$\mp ac$$
$$ad$$
$$-\, ad$$
$$0$$

$$4m)\ 20ma - 12ma \mid 5a - 3a$$
$$20ma$$
$$-$$
$$0 \quad - 12ma$$
$$\mp 12ma$$
$$0$$

Man dividerer her hvert Led i Dividenden med Divisor (ligesom ved Tal Divisionen), og skriver de udkomne Qvotienter bag Stregen med deres

deres behørige Tegn. Dog maa i dette Tilfælde ethvert Led i Dividenden indeholde de samme Bogstaver som Divisor, da Divisionen ellers ikke lader sig udføre uden Brøk.

*b.* Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Størrelser, f. Ex.:

$$a + b)\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \,(\, a^2 + 2ab + b^2$$
$$\underline{a^3 + a^2b}$$
$$\phantom{a^3 + {}}2a^2b + 3ab^2$$
$$\phantom{a^3 + {}}\underline{2a^2b + 2ab^2}$$
$$\phantom{a^3 + 2a^2b + {}}ab^2 + b^3$$
$$\phantom{a^3 + 2a^2b + {}}\underline{ab^2 + b^3}$$
$$\phantom{a^3 + 2a^2b + {}}0 \quad 0$$

Man tager her det første Led af Divisor $a$, og undersøger hvor ofte det indeholdes i det første Led af Dividenden $a^3$, og findes da efter forrige § Qvotienten $a^2$, dermed multipliceres nu hele Divisor, og det udkomne Produkt subtraheres fra Dividenden; nu undersøges fremdeles, hvor ofte det første Led af Divisor indeholdes i det første Led af den tilbageværende Rest af Dividenden, og fortfares paa samme Maade som tilforn, indtil der, som i det foregaaende og følgende Exempel, intet bliver tilovers; Divisionen er da fuldført og Qvotienten nøiagtig udtrykt $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$.

$$a - b)\, a^3 - b^3 \,(a^2 + ab + b^2$$
$$a^3 \mp a^2b$$
$$- \quad +$$
$$a^2b - b^3$$
$$a^2b \mp ab^2$$
$$- \quad +$$
$$ab^2 - b^3$$
$$ab^2 - b^3$$
$$- \quad +$$
$$0 \quad 0$$

Møder i Divisionen det Tilfælde, at de enkelte Led i Dividenden ikke indeholde Divisor, da udtrykkes Qvotienten ved Brøk, som i følgende Exempel: $a : (a - x)$ der udføres saaledes:

$$a - x)\, a \,(1 + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{x^4} \text{ o. s. f.}$$
$$a \mp x$$
$$- \quad +$$
$$x$$
$$x - \frac{x^2}{a}$$
$$- \quad +$$
$$\frac{x^2}{a}$$
$$\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}$$
$$- \quad +$$
$$\frac{x^3}{a^2}$$
$$\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}$$
$$- \quad +$$
$$\frac{x^4}{a^3}$$

Divisionen skeer her efter samme Regler som før, men da der strax møder, at $x$ skal divideres med $a$, kan Divisionen efter § 40 ikke skee anderledes, end ved at udtrykke Qvotienten som en Brøk $\frac{x}{a}$ o. s. f. Divisionen kan fortsættes i det Uendelige, og man kan derved opløse enhver Brøk i en uendelig Tal-Række, hvorom mere paa et andet Sted.

Anm. At handle udførligere om Regning med Bogstaver, om Potentser, og Regnings-Arterne dermed, samt om Tal-Rækker og Ligninger, troer jeg efter min Plan her ikke passende, jeg har allene villdet vise de fire Regnings-Arter med almindelige Tegn eller Bogstaver, for at kunde nytte de almindelige Former i det følgende, ved Qvadrat- og Cubik-Rodens Udtrækning, og tillige for i Almindelighed at udføre Beviserne i Læren om Forhold og Proportioner.

## Om Decimal- eller tiendedeels Brøk.

§. 47.

En tiendedeels Brøk eller en Decimalbrøk kaldes enhver Brøk, hvis Nævner er ti, hundrede eller tusinde ꝛc., eller hvor Nævneren er en høiere Eenhed, f. Ex. $\frac{7}{10}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{756}{1000}$, $\frac{2873}{10000}$.

Efter det decadiske Tal-Systems Natur (§ 14) voxer Zifrenes Værd fra høire til venstre, og bliver for hver Plads, de rykke frem, ti Gange høiere,

paa

paa samme Maade kan de siges at tage af i Værd, fra venstre til høire, og blive for hver Plads de rykkes mod høire Side, ti Gange ringere. Denne Egenskab ved Tal-Systemet giør, at man kan udtrykke Decimal-Brøkene blot ved at skrive Tællerne paa følgende Maade: Man betegner med en Streg eller et Punkt, hvor de hele Tal ophøre, og skriver efter dette Mærke mod høire Decimalbrøkens Tæller, det Ziffer næst ved Eenerne mod høire maa da betegne Størrelser som ere ti Gange mindre end Eenheden og følgelig tiende Dele; det næste Ziffer, Størrelser, som ere ti Gange mindre end tiende Dele, altsaa hundred Dele o. s. v. Saaledes betegner Udtrykket 3, 7 tre Eenheder og syv tiende Dele, og altsaa det samme som $3\frac{7}{10}$; 8, 42 otte hele, fire tiende Dele og to hundred Dele eller 42 hundred Dele, og er altsaa $= 8\frac{42}{100}$. De Ziffre paa høire Side af Stregen kaldes Decimal-Zifre eller Decimaler.

I det Tilfælde, at der ingen hele Tal ere, betegnes deres Plads med et Nul, ved hvilket Stregen sættes, saaledes skrives $\frac{27}{100}$, som Decimalbrøk 0,27. En saaledes skreven Decimalbrøk kan læses, enten ved at læse hver Slags Dele for sig, f. Ex. 8,342 læses: otte hele, tre tiende Dele, fire hundrede Dele og to tusinde Dele; eller og, otte hele, tre hundrede og to og fyrretyve

tusind

tusind Dele, da $\frac{3}{10}$ er $= \frac{300}{1000}$, $\frac{4}{100} = \frac{40}{1000}$ og følgelig $8 + \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{2}{1000} = 8\frac{342}{1000}$ $= 8,342$. Man kan altsaa giøre den almindelige Regel: at Tælleren læses som et heelt Tal, og Nævneren er altid en høiere Eenhed, der har saa mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren.

Anm. Man kan paa Grund af det nu anførte kalde tiende Dele Eenheder af første ringere Orden, hundred Dele af anden, tusinde Dele af tredie, ligesom man kalder Tiere, Eenheder af første høiere Orden, Hundredet af anden, Tusinder af tredie o. s. f.; og paa Grund deraf skrive Decimalbrøk uden Komma eller Streg, naar Enernes Plads betegnes med et 0, og de høiere Eenheder paa venstre Side af Enerne med de bekræftende Tal 1, 2, 3, men de ringere Eenheder paa høire Side med de nægtende Tal $-1$, $-2$, $-3$ etc., f. Ex. $\overset{2}{2}\,\overset{1}{3}\,\overset{0}{4}\,\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{6}\,\overset{-3}{7}$ er $= 234,567$ $= 234\frac{567}{1000}$.

§. 48.

At forandre en given simpel Brøk til en Decimalbrøk, er allene at søge Tælleren (§ 47) til en Decimalbrøk, der udtrykker den givne Brøks Værdi uforandret; dette skeer ved at føie Nuller til den givne Brøks Tæller, og dividere denne saaledes forøgede Tæller med dens Nævner, Qvotienten er da den søgte Decimal-Tæller, f. Ex. $\frac{3}{8}$ forandres saaledes til Decimal-Brøk $\frac{3000}{8} = 0,375$.

Be-

Beviis. Den fundne Decimal-Tæller 0,375 er $= \frac{375}{1000} = \frac{375 \times 8}{1000 \times 8}$ (§ 30. 4) $= \frac{3000}{8000}$ $= \frac{3000 : 1000}{8000 : 1000} = \frac{3}{8}$. Egentlig forøges og formindskes Brøkens Tæller og Nævner med samme Tal og dens Værd bliver altsaa i Følge den anførte § 30 uforandret. Saaledes er $\frac{5}{8} = \frac{5000}{8000} =$ $\frac{5000 : 8}{8000 : 8} = \frac{625}{1000} = 0,625$.

Der gives imidlertid Brøk, der ikke lade sig nøiagtig forvandle til Decimalbrøk f. Ex. $\frac{2}{3} =$ $\frac{2000000}{3} = 0,666666\frac{2}{3}$. I saadanne Tilfælde vedbliver man at føie flere Nuller til Tælleren, og fortsætter Divisionen med Nævneren; saalænge Regningens Nøiagtighed udfordrer det; i nærværende Exempel bliver der, efter at der er føiet 6 Nuller til, $\frac{2}{3}$ tilbage, som er $\frac{2}{3}$ af en Million Deel (§ 47). Denne Brøk, som er over en halv, ansees for en heel Million Deel og antages altsaa $\frac{2}{3} =$ 0,666667, hvor Decimalbrøken er $\frac{1}{3}$ af en Million Deel større end den egentlig burde være. Er dermod den ved Divisionens Ophør overblevne Brøk under en halv, da bortkastes den, saaledes er $\frac{1}{3} = 0,333333$ : : : : : :

De saaledes fundne Decimalbrøk ere vel alle enten større eller mindre end de givne simple Brøk, i hvis Sted de skulde settes; men jo længere man ved at tilføie Nuller fortsætter Divisionen, desto mere nærmer Værdien af Decimalbrøken sig til den

givne

givne Brøks Værdi, og man kan fortsætte det saa længe, at Feilen ikke udgiør en Million-, Billion-, Trillion-Deel af Eenheden. Da nu Regningen med Decimalbrøk er, som strax videre skal vises, saa overmaade beqvem, saa er i praktiske Regninger, der enten ikke fordre en saa gandske fuldkommen Strenghed; eller og efter deres Natur ikke kan tage derimod; simple Brøkers Forvandling til Decimalbrøker, af megen Vigtighed og Nytte.

## §. 49.

Decimalbrøkers Natur medfører, at de uden Vanskelighed bringes til eens Benævning, blot ved at sætte Nuller til høire Side af Tælleren, hvorved Værdien ikke forandres, f. Ex. $0{,}75 = 0{,}750 = 0{,}7500$, thi udtrykte som simple Brøk er $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \frac{7500}{10000}$ (§ 30). De adderes og subtraheres derfor, naar de blot skrives ordentlig under hinanden (tiende Dele under tiende Dele, hundred Dele under hundred Dele &c.), efter de samme Regler, som om hele Tal ere forklarede (§ 17 og 19), f. Ex.

| At Addere: | At Subtrahere: |
|---|---|
| 8,304 | 12,3405 |
| 7,54 | 8,7638 |
| 0,0598 | 3,5767 |
| 3,7569 | |
| 19,6607 | |

§ 50.

Decimalbrøk multipliceres som hele Tal, og Antallet af Decimal-Zifrene i Produktet er saa stort, som Summen af Faktorernes Decimaler.

Rigtigheden af denne Regel indsees, naar man erindrer, at, naar to Tal, der endes med Nuller, multipliceres med hinanden, faaer Produktet saa mange Nuller, som begge Faktorerne (§ 23. Till. 2). Hvad der gielder om Tal i Almindelighed, gielder og om en Brøks Nævner; skal altsaa 2 Brøker, hvis Nævnere endes med Nuller, multipliceres med hinanden (§ 35), saa faaer Produktets Nævner saa mange Nuller, som begge Faktorernes. Nu har en Decimalbrøks Nævner altid saa mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren (§ 47), naar altsaa to Decimalbrøke multiplicceres, maa Produktet have saa mange Zifre paa høire Side af Kommaet, som begge Faktorerne.

For at indsee dette endnu tydeligere, skriver man Decimalbrøkerne, som simple Brøk, og multiplicere dem efter § 35, f. Ex.:

$$0{,}375 \times 0{,}26 = \frac{375}{1000} \times \frac{26}{100} = \frac{9750}{100000}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ 0{,}26 \\ \hline 2250 \\ 750\phantom{0} \\ \hline 0{,}09750 \end{array}$$

Ved at multiplicere Tællerne i nærværende Exempel faaer vi Produktet 9750. Efter den nylig forklarede

flarede Regel skulde Produktet have fem Decimaler, her føies altsaa Nuller foran, for at Ziffrene kan faae deres rigtige Plads, og i Følge deraf betegne den rigtige Classe af ringere Eenheder (§ 47. Anmærkning).

Bestaaer enten den eene eller begge Faktorerne af hele Tal og Decimalbrøk, skeer Multiplicationen paa lige Maade og efter samme Regel; thi ethvert saadan Tal kan ansees som en uegentlig Brøk, f. Ex. at multiplicere a) 32,7835 med 0,423.

$$\begin{array}{r} 32{,}7835 \\ 0{,}423 \\ \hline 983505 \\ 655670 \\ 1311340 \\ \hline 13{,}8674205 \end{array} \quad = \frac{327835}{10000} \times \frac{423}{1000} = \frac{138674205}{10000000} = 13\frac{8674205}{10000000}$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{r} 5{,}023 \\ 3{,}46 \\ \hline 30138 \\ 20092 \\ 15069 \\ \hline 17{,}37958 \end{array} \quad \Bigg\} = \frac{5023}{1000} \times \frac{346}{100} = \frac{1737958}{100000} = 17\frac{37958}{100000}$$

§. 51.

Division med Decimalbrøk skeer som med hele Tal; kun at Qvotienten faaer saa mange Deci-

Decimaler, som Dividenden har flere end Divisor, f. Ex. 32,48 : 2,4.

2,4)32,48(13,5

24

---

84

72

---

124

120

---

48

48

---

00

Beviis. Ere Dividendens og Divisors sidste Zifre mod høire Side enten begge Enere, eller og begge tiende Dele, hundred Dele, eller tusind Dele, og følgelig Dividenden og Divisor Størrelser af lige Art, bliver Qvotienten efter § 25 altid hele Tal. Har derimod Dividenden flere Decimaler end Divisor, er den for hver Decimal den har flere, 10 Gange mindre; men samme Divisor kan ikke indeholdes saa ofte i et ti Gange mindre Tal, som i det større, og Qvotienten maa da blive ti Gange mindre for hver, det er, der maa i den afskiæres ved Decimal-Tegnet saa mange Zifre fra høire, som der i Dividenden er flere Decimaler, end i Divisor. Lad i det ovenanførte Exempel

Kom-

Kommaet i Dividenden flyttes et Ziffer tilbage mod høire, det hedder da $3244,8 : 2,4 = \frac{32448}{10} : \frac{24}{10} = 1352$. Ved at rykke Kommaet en Plads længer mod Venstre, bliver Dividenden 10 Gange mindre, og Divisor uforandret; Qvotienten bliver altsaa ikke den samme, men ti Gange mindre, hvilket just, efter det om Decimalbrøkene forklarede, skeer naar dens sidste Ziffer afskiæres ved Decimal-Tegnet, og den bliver da i nærværende Exempel 135,2. Blev Dividenden 32,448 og Divisor uforandret 2,4, vilde Qvotienten blive 13,52.

Indtræffer det Tilfælde, at Dividenden har færre Decimaler end Divisor, da kan man ved at føie Nuller til Dividenden, hvorved dens Værdie slet ikke forandres (§ 49), bringe dem til at blive eensartede, f. Ex. $328 : 0,75 = 328,00 : 0,75$

```
0,75)328,00(437,33
     300
      280
      225
       550
       525
        250
        225
         250
         225
          25
```

Qvotienten er i Følge det forhen forklarede 437 de overblevne 25 kunde tilføies som en simpel Brøk, og blev da $437\frac{25}{75}$; men vil man have Qvotienten udtrykt i Decimalbrøk, tilføies flere Nuller, og Divisionen fortsættes, men da Dividenden ved de tilføiede

Nul-

ler er bleven formindsket, maa der i Qvotienten afskiæres Decimaler efter Reglen.

Ved at betragte nærværende Exempel, seer man let, at de følgende Zifre, der ved at føie Nuller til Dividenden, kunde erholdes i Qvotienten, vilde stedse blive de samme, og at der bestandig vilde blive 25 tilovers. Man retter sig altsaa i Henseende til Fortsættelsen af Divisionen efter det som er sagt § 48.

Anmærk. Rigtigheden af den anførte Divisions-Regel indsees ogsaa, naar Decimalbrøken udtrykkes som simple Brøk og behandles efter §. 37, for Exemp.: $32{,}448 : 2{,}4 = \frac{32448}{1000} : \frac{24}{10} = \frac{32448}{1000} : \frac{2400}{1000} = \frac{32448}{2400} = 13\frac{1248}{2400} = 13\frac{1248:24}{2400:24} = 13\frac{52}{100} = 13{,}52$.

Da de færreste Brøk nøiagtig kan udtrykkes i Decimalbrøk, men kun ved Tilnærmelse (§ 48), saa findes, ved at give Agt paa de ei nøiagtigt rigtige Decimalbrøks Indflydelse paa det ved Regnings-Arterne udkommende, at man paa Grund af de sidste Zifres Urigtighed i Produktet og Qvotienten kan forkorte Multiplicationen og Divisionen med Decimalbrøk.

## Om Tallenes Potenser og deres Rødder.

§. 52.

Et Produkt af lige store Faktorer, kaldes en Potens eller Værdighed af det som Faktor brugte

Tal, der ogsaa kaldes Potensens Rod; Faktorernes Antal bestemmer Graden af Potensen, og Tallet, hvorved dette tilkiendegives kaldes Potens-Exponent (Værdigheds Angiver). Saaledes kaldes et Produkt af to lige store Faktorer den anden Potens eller Qvadrat-Tallet, eller og kortere Qvadratet af Roden, som da faaer Navn af Qvadratrod. Et Produkt af tre lige store Faktorer, heder den tredie Potens eller Cubic-Tallet, og kortere Cubus af Faktoren, der nu kaldes Cubikrod. Og i Almindelighed et Produkt af *n* lige store Faktorer den *n*te Potens af Faktoren. Til Ex.: 16 er Qvadratet, 64 Cubus, og 1024 den femte Potens af 4, fordi $4 \times 4 = 16$, $4 \times 4 \times 4 = 64$, og $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$. Ligeledes er 4 Qvadratroden til 16; Cubikroden til 64, og den femte Rod til 1024.

Med et almindeligt Udtryk er *aa* Qvadratet, *aaa* Cubus, *aaaaa* den femte Potens af *a* o. s. f.

Till. 1. At ophøie et Tal til 2den, 3die eller *n*te Potens, er at finde denne Potens af Tallet, som skeer altsaa blot ved at multiplicere Tallet 2, 3 eller *n* Gange med sig selv, og tilkiendegives ved Exponenten, som skrives over Linien ved høire Side af Roden saaledes: $4^2 = 4 \times 4 = 16$. $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$. $a^2 = aa$ $a^3 = aaa$ (§ 40).

Anm.

Anm. At ophøie et Tal til anden Potens, kaldes at qvadrere det; til tredie, at cubere det.

Till. 2. At udtrække den 2den, 3die eller *n*te Rod af et Tal, er at finde denne Rod ɔ: det Tal, der 2, 3 eller *n* Gange multipliceret med sig selv, har frembragt det givne Tal. At dette skal skee, tilkiendegives ved det saa kaldte Rod-Tegn $\sqrt{}$, der sættes foran det Tal, hvis Rod søges. Ved et Tal, som sættes i Rod-Tegnet og kaldes Rod-Exponent, tilkiendegives, hvilken Rod der forlanges, f. Ex. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{256}$ betyder, at der søges den tredie Rod eller Cubik-Roden af 27, fierde Rod af 256. Ved Qvadratroden udelader man for Kortheds Skyld Exponenten 2, som skulde sættes i Rodtegnet, saa at $\sqrt{64}$ betyder Qvadratroden af 64.

Till. 3. Et Tal qvadreres, naar det multipliceres med sig selv, og cuberes, naar det multipliceres med dets Qvadrat, og bliver i Almindelighed ophøiet til den *n*te Potens, naar det multipliceres med sin $(n - 1)$te Potens. Naar man altsaa multiplicerer de ni enkelte Tals Qvadrater, som vides af Multiplications-Tabellen (§ 21) med Tallene selv, har man deres Cuber, og altsaa følgende Tabel over deres Qvadrat og Cubik-Tal.

Rod

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Qvadrat | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| Cubus | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Till. 4. Naar Roden til en Potens forøges med et Nul, forøges dens Qvadrat med to, Cubus med tre o. s. f. (§ 23. 2 Tillæg), thi f. Ex.

$$30^2 = 30 \times 30 = 900$$
$$300^2 = 300 \times 300 = 90000$$
$$30^3 = 30 \times 900 = 27000$$
$$300^3 = 300 \times 90000 = 27000000.$$

§. 53.

En Brøk qvadreres, cuberes og fort ophøies til $n$ Potens, naar dens Tæller og Nævner hver for sig, qvadreres, cuberes eller ophøies til $n$ Potens; thi at qvadrere en Brøk er at multiplicere den med sig selv (§ 52. 3 Tillæg), hvilket efter § 35 skeer ved at multiplicere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner, og altsaa just, ved at qvadrere baade Tæller og Nævner, f. Ex. $(\frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2}$ $(\frac{2}{7})^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2^2}{7^2}$ (§ 52) $= \frac{2}{7} \times \frac{4}{49} = \frac{8}{343} = \frac{2^3}{7^3}$.

At udtrække Roden af en Brøk (§ 52. 2 Til.) skeer følgelig ved at udtrække Roden af Tæller og Nævner, og Roden er en Brøk, hvis Tæller og

Nævner ere Røder af den givne Brøks Tæller og Nævner, f. Ex., $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

Tillæg. Qvadratet af en egentlig Brøk er altsaa mindre end Roden; Cubus mindre end Qvadratet, og i Almindelighed enhver høiere Potens af samme Brøk mindre end den lavere. F. Ex., $\frac{4}{49} < \frac{2}{7}$; $\frac{8}{343} < \frac{4}{49}$ (§ 34).

§. 54.

Af en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere besteinte og endelige Størrelser, og som ikke er liig et heelt Tal, kan ingen Potens blive et heelt Tal.

Beviis. Er den givne Brøk en egentlig Brøk, er det klart af Tillægget i forrige §, thi da Potenserne stedse blive mindre end Roden, blive de saa meget mere mindre end en Heel. Er det derimod en uegentlig Brøk, som et er liig et heelt Tal, hvor Nævneren altsaa (§ 28) ikke er nogen aliqvot Deel af Tælleren; da er enten Tæller og Nævner relative Prim-Tal, f. Ex. i Brøken $\frac{12}{7}$ eller og, de ved at divideres med deres største fælles Maal (§ 31) kan bringes dertil, f. Ex. $\frac{32}{28} = \frac{8}{7}$. Enhver Potens af en saadan Brøk vil blive en Brøk, hvis Tæller og Nævner stedse blive Produkter af Tal, der ere indbyrdes Prim-Tal; og følgelig

gelig vil Nævneren aldrig blive en aliqvot Deel af Tælleren og Potensen aldrig blive et heelt Tal (§ 29).

1 Till. Naar altsaa Roden til et heelt Tal ikke er et heelt Tal, er det heller ingen Brøk, hvis Tæller og Nævner ere endelige Tal; men da enhver Mængde maa kunde udtrykkes ved hele Tal og Brøk, maa denne Rod nødvendig være en Brøk; den er altsaa en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere uendelig store, og følgelig aldrig nøiagtig kan udtrykkes. Saadanne Rod-Størrelser kaldes irrationale Tal, f. Ex. $\sqrt{7} = 2,645 \ldots\ldots$ $\sqrt{3} = 1,732 \ldots\ldots$

2 Till. Et Tal, hvis Qvadrat-Rod er et heelt Tal, kaldes et fuldkomment Qvadrat-Tal; et Tal, hvis Cubik-Rod er et heelt Tal, hedder et fuldkomment Cubik-Tal, og i Almindelighed enhver Potens, hvis Rod er et heelt Tal, en fuldkommen Potens. Er Roden derimod ikke et heelt Tal, hedder det, et ufuldkomment Qvadrat- og Cubik-Tal, og i Almindelighed en ufuldkommen Potens. Rødderne til alle ufuldkomne Potenser ere i Følge 1 Tillæg irrationale Tal.

§. 55.

Et fuldkomment Qvadrat-Tal skal, naar Roden bestaaer af to Dele, eller er binomisk,

indeholde: 1) Qvadratet af Rodens første Deel, 2) det dobbelte Produkt af begge Dele, 3) Qvadratet af den sidste Deel.

Beviis. Da Bogstaver ere almindelige Tegn, saa kan enhver saadan binomisk Rod udtrykkes ved det almindelige Udtryk $a+b$, og altsaa Qvadratet af en saadan Rod ved $(a+b)^2$, som er $= (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ (§ 44), da $a$ betegner Rodens første Deel, er $a^2$ den første Deels Qvadrat; $2ab = 2 \times ab =$ det dobbelte Produkt af begge, eller Produktet af den første og anden Deel to Gange taget, og $b^2 =$ Qvadratet af den anden Deel.

Med Tal-Exempler lader det sig ogsaa oplyse saaledes:

$$
\begin{array}{l}
47 = 40 + 7 \\
\underline{47} \\
49 = \quad 7^2 \\
\left.\begin{array}{l} 28 = 4 \times 7 \\ 28 = 4 \times 7 \end{array}\right\} = 2 \times 4 \times 7 \\
16 = \quad 4^2 \\
\hline
2209 = 47^2.
\end{array}
$$

Tallet 47 bestaaer af 4 Tiere og 7 Eenere, Qvadrat-Tallet er sammensat af Tiernes Qvadrat, som er 1600 (§ 52. 4 Till.), Produktet af Tierne og Eenerne to gange taget, som er 2 × 280 = 560,

560, og Enernes Qvadrat, som er 49; ved, som i nærværende Exempel, at skrive de enkelte Producter hver paa sit Sted, efter § 22, sees dette tydeligt. Exemplet kan og staae saaledes:

$$\begin{array}{rl} 47 = & 40 + 7 \\ 47^2 = & (40 + 7)^2 = \begin{array}{r} 40 + 7 \\ 40 + 7 \\ \hline 280 + 49 \\ 1600 + 280 \quad \end{array} \\ \hline 47^2 = & 1600 + 560 + 49 \end{array}$$

1 Tillæg. Da ethvert heelt Tal, af hvor mange Zifre det end bestaaer, kan deles i to Dele, saa kan den forklarede Form anvendes paa alle Tal, til at finde deres Qvadrat, f. Ex. $476^2 = (470 + 6)^2 = 470^2 + 2 \times 470 \times 6 + 6^2$, som udsættes saaledes: $476 = 470 + 6$

$$476^2 = \left\{ \begin{array}{l} 470^2 = \left\{ \begin{array}{ll} 40^2 = & 16\,.\,.\,.\,. \\ 2 \times 40 \times 7 = & 56\,.\,.\,. \\ 7^2 = & 49\,.\,. \end{array} \right. \\ 2 \times 470 \times 6 = \quad 564\,. \\ 6^2 = \quad 36 \\ \hline \qquad 226576 \end{array} \right.$$

2 Tillæg. Ved at sammenligne Delene af Qvadratet af 47 med Delene af Qvadratet af 476, sees, at Qvadratet, naar Roden forøges med eet Ziffer, forøges med et dobbelt Product af de forrige Zifre og det tilkomne, som i nærværende Ex-

empel

empel er $2 \times 470 \times 6$, og Qvadratet af det tilføiede som her er $6^2$.

Forøges altsaa Roden 476 endnu med et Ziffer og bliver 4763, vil Qvadratets Dele være

$$4763^2 \begin{cases} 4760^2 \begin{cases} 470^2 \begin{cases} 40^2 = & 16\ldots\ldots \\ 2 \times 40 \times 7 = & 56\ldots\ldots \\ 7^2 = & 49\ldots\ldots \end{cases} \\ 2 \times 470 \times 6 = & 564\ldots \\ 6^2 = & 36\ldots \end{cases} \\ 2 \times 4760 \times 3 = & 2856. \\ 3^2 = & 9 \\ \hline & 22686169 \end{cases}$$

Med almindelige Tegn sees det saaledes:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$

$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$

3 Tillæg. Da ethvert med Ziffre udtrykt Tal, kan ansees at bestaae af et vist Tal $n+1$, saa vil Qvadratet af ethvert saadant Tal bestaae af $n^2 + 2n + 1$, og altsaa Forskiællen imellem Qvadratet af $n = n^2$

og Qvadratet af $n + 1 = n^2 + 2n + 1$

være $= 2n + 1$

naar Roden forhøies ved Tillæg af Eenheden, forhøies Qvadratet med det dobbelte af den forrige

Rod

Rod og Eenheden, f. Ex. $12^2 = 144$. $13 = 12 + 1$. $13^2 = 12^2 + 2 \times 12 + 1 = 169$.

§. 56.

Ved den i forrige § forklarede Opløsning af Qvadratets Dele indsees, at (det første Ziffer fra venstre Side undtagen) giver ethvert, af de øvrige Zifre i Roden, to nye Zifre i Qvadrat-Tallet, hvoraf det første indeholder Eenerne af det dobbelte Produkt, af det eller de foregaaende Zifre, og dette, og det andet dettes Qvadrat. Naar altsaa et givet Qvadrat-Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Zifre i hver Classe, (den sidste Classe undtagen, som undertiden kun har eet Ziffer), saa har Roden til dette Qvadrat saa mange Zifre, som der ere Classer, og begynder man fra venstre, da findes i den første Classe Qvadratet af Rodens første Ziffer, i den anden det dobbelte Produkt af Rodens første og andet Ziffer, samt Qvadratet af det andet; i den tredie det dobbelte Produkt af Rodens tvende første Zifre og det tredie, samt dets Qvadrat; og altsaa i den første Classe Qvadratet af Rodens første Ziffer; i de 2 første Qvadratet af de to første Zifre i Roden, og i de tre første Klasser Qvadratet af Rodens tre første Ziffer o. s. f. For Exempel Qvadratet af [illegible]

$4763^2$ er = 16 . .
56 .
49 . .
564 .
36 . .
2856 .
9
―――――――
22686169

$2354^2$ = 4 . .
12 .
9 . .
230 .
25 . .
1880 .
16
―――――――
5541316

§. 57.

At udtrække Roden af et givet Tal, der bestaaer af flere end to Zifre (thi da vil det uden Vanskelighed vides af den § 52 anførte Tabel) skeer altsaa saaledes:

1) Det givne Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Tal i hver Classe.

2) I Qvadrat-Tabellen søges det høieste Qvadrat-Tal, der lader sig subtrahere fra Tallene i første Classe

Classe fra venstre Side, som hensættes derunder og subtraheres derfra; dets Rod er den søgte Rods første Ziffer.

3) Til den fra første Classe overblevne Differents nedsættes anden Classe, det fundne første Rod-Ziffer fordobles og hensættes, saa at dets Enere kommer under det første af anden Classes Zifre, som Divisor, og den derved fundne Quotient bliver Rodens andet Ziffer. Med dette multipliceres den brugte Divisor, og Productet sættes med dets Enere under det første af anden Classes Zifre; nu tages Qvadratet af Rodens andet Ziffer, og sættes med dets Enere under anden Classes sidste Ziffer. Disse tvende Dele sammenlægges og subtraheres fra de af første og anden Classe lige over staaende Tal. Lader denne Subtraction sig ikke iværksætte, er det Beviis paa, at Rodens andet Ziffer er taget for høit, i modsat Tilfælde er den fundne Quotient virkelig det andet Ziffer af den søgte Rod.

4) Til den fra første og anden Classe overblevne Differents nedsættes tredie Classe, det dobbelte af de to fundne Rod-Zifre tages nu som Divisor, og hensættes, at dets Enere kommer under det første af tredie Classes Zifre, dermed divideres de lige over staaende Tal, og den fundne

Quo-

Qvotient er da Rodens tredie Ziffer, derpaa fortsættes som i No. 3 er forklaret, og saaledes vedblives med alle de Classer, som ere forhaanden.

5) Bliver tilsidst intet tilovers, da er det givne Tal et fuldkommen Qvadrat (§ 54. Till. 2) og Roden er funden nøiagtig. Bliver derimod en Rest, saa er Tallet et ufuldkomment Qvadrat-Tal, og følgelig dets Rod et irrational Tal, og der maa til den fundne Rod komme en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere uendelige (§ 54, Till. 1). Til Exempel, at udtrække Roden af 5484964, skeer saaledes:

$$a\ b\ c\ d$$

$$\sqrt{5|48|49|64} = 2\,3\,4\,2$$

$$a^2 = 4$$

$$1{,}48$$

$$2a = (4)$$

$$2ab = 12$$

$$b^2 = 9$$

$$2ab + b^2 = 129$$

$$19{,}49$$

$$2(a+b) = (46)$$

$$2(a+b)c = 184$$

$$c^2 = 16$$

2(a+b)

$2(a+b)c+c^2 = 18{,}56$

$93{,}64$

$2(a+b+c) = (46\ 8)$

$\left.\begin{array}{r} 2(a+b+c)d = 936 \\ d^2 = \quad 4 \end{array}\right\}$

$2(a+b+c)d+d^2 = 93{,}64$

$00{,}00$

Det høieste Quadrat der kan subtraheres fra første Classe er 4, dets Rod er 2. Den første Divisor er 2 × 2, som sættes efter No. 3, og den fundne Quotient 3 er det andet Ziffer i Roden; med den multipliceres Divisoren 4, og Produktet 12, som forøget med Quadratet af 3, subtraheres fra 148, til Resten 19 føies 3die Classe o. s. f. De Tal, der saaledes efterhaanden fradrages fra Tallet 5484964 udgiøre just Quadratet af 2342 efter § 55 og 56.

Et andet Exempel:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad a\ \ b\ \ c \\ \sqrt{32|47|86}\ (\ 5\ \ 6\ \ 9 \\ \ \ 25 \\ \hline \ \ 7{,}47 \\ \ \ (10)6 \\ \ \ 636 \\ \hline \ \ 111{,}86 \\ \ \ (112)9 \\ \ \ 10161 \\ \hline \ \ 1025 \end{array}$$

1 Tillæg. I Steden for at multiplicere først det dobbelte af det eller de fundne Rod-Zifre med Qvotienten, og dertil igien addere Qvadratet af Qvotienten, for under et at subtrahere det fra de over staaende Tal efter No. 3, kan man, som i sidste Exempel er skeet, strax hensætte den fundne Qvotient ved Siden af Divisoren, og derpaa foretage Multiplicationen; da man faaer ved een Multiplication det dobbelte Produkt af de førrige Zifre og det Nye, samt Qvadratet af det nye, saaledes er i sidste Exempel $636 = 2 \times 50 \times 6 + 6^2$ og $10161 = 2 \times 560 \times 9 + 9^2$.

2 Tillæg. Bliver, som i sidste Exempel, noget tilovers, da sees, at Roden ikke er funden nøiagtig; thi 569 er mindre end Roden af 324786, men dog kan denne Rod ikke være een Eenhed større end 569, thi i saa Fald maatte det overblevne 1025 være mere end $2 \times 569 + 1$ (§ 55. 3 Till.) Roden kan da ikke bestemmes nøiagtig, da den er et irrational Tal (§ 54. 2 Till.), men findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, som strax skal forklares.

§. 58.

For bedre at forstaae denne Maade at finde Roden af et ufuldkomment Qvadrat-Tal ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, vil jeg først vise, hvor-
leedes

ledes Roden udtrækkes af en given Decimalbrøk. Til Ex. af 13,7. Man føier nemlig til den givne Brøk paa høire Side saa mange Nuller man vil, dog saa, at Decimalernes Antal bliver lige, og derpaa udtrækker Roden som af hele Tal, der vil da blive i Roden saa mange Decimaler, som de med Nuller formerede Decimaler, udgiorte Classer.

$\sqrt{13,7} = \sqrt{13,700000}$

$\sqrt{13,70,00,00} \dagger 3,701$

```
9
----
4,70
(6)7
469
----
1,00
(74)0
000
-----
1,00,00
(740)1
7401
-----
2599
```

thi $\sqrt{13,7} = \frac{\sqrt{137}}{\sqrt{10}}$ (§ 53) $\frac{\sqrt{13700000}}{\sqrt{1000000}} =$ $\frac{3701}{1000} = 3,701.$

1 Tillæg. Roden af enhver Brøk findes derfor lettest ved at forandre den til en Decimal-

brøk,

brøk, og deraf udtrække Roden, f. Ex., da $\frac{5}{7}$ $=$ 0,714285714285 . . ., saa er $\sqrt{\frac{5}{7}} =$ $\sqrt{0{,}714285714285} = 0{,}845154$.

§. 59.

Af et heelt Tal, som ikke er et fuldkomment Qvadrat-Tal, findes Roden ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, saa nøiagtig som man vil, paa følgende Maade:

Man føier til det givne Tal saa mange Par Nuller, som man forlanger Decimaler i Roden, og udtrækker derpaa Roden efter de § 57 forklarede Regler. F. Ex., der forlanges at vide Roden af 7.

```
√7 | 2,6457
 4 |
 ---
 3,00
  (4)6
  276
 ------
   24,00
   (52)4
    2096
 ---------
     304,00
     (528)5
      26425
 ------------
       3975,00
       (5290)7
        370349
       --------
         27151
```

Rig-

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: 7 er $=$ 7,000000 (§ 49) og altsaa $\sqrt{7} = \sqrt{7{,}000000}$.

§. 60.

Cubus eller Cubik-Tallet af en binomisk Rod (en Rod som bestaaer af to Dele), bestaaer af: 1. Cubus af Rodens første Deel. 2. Det tredobbelte Produkt af den førstes Qvadrat multipliceret med den anden. 3. Det tredobbelte Produkt af den første multipliceret med den andens Qvadrat; og 4. Cubus af den anden Deel.

Thi efter § 52 findes Cubik-Tallet af en Rod, naar den multipliceres med sit Qvadrat, altsaa er $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a+b) =$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \qquad\qquad \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

og da Udtrykket $a + b$ gielder i Almindelighed for ethver binomisk Rod, saa maa og dets fundne Cubus vise de Dele, som ethvert saadan fuldkomment Cubik-Tal nødvendig maa indeholde.

Saaledes findes Cubus af 47, som er $=$ 40 + 7 at være

[illegible] $=$ 1,

$= 1, 40^3 = 64 \ldots$

$2, 3 \times 40^2 \times 7 = 336 \ldots$

$3, 3 \times 40 \times 7^2 = 588 .$

$4, 7^3 = 343$

$47^3 = 103823.$

Tillæg. Da ethvert Tal, af hvor mange Zifre det end bestaaer, kan deles i to Dele, og følgelig bringes til det almindelige Udtryk $a + b$, saa kan og Cubik-Tallet af ethvert heelt Tal findes efter den anførte Form; til Ex. at cubere 468.

$$468 = 460 + 8 = a + b$$

$$468^3 = (460 + 8)^3 = (a + b)^3$$

$$468^3 = \begin{cases} 460^3 = \begin{cases} 40^3 = 64000 \ldots \\ 3 \times 40^2 \times 6 = 28800 \ldots \\ 3 \times 40 \times 6^2 = 4320 \ldots \\ 6^3 = 216 \ldots \end{cases} \\ 3 \times 460^2 \times 8 = 5078400 \\ 3 \times 460 \times 8^2 = 88320 \\ 8^3 = 512 \\ \hline 102503232 \end{cases}$$

Cubus af ethvert heelt Tal, som bestaaer af to eller flere Zifre, lader sig og sammensætte af de blotte Zifre; naar man udsætter de Dele, hvoraf efter forrige § det fuldkomne Cubik-Tal skal bestaae, saaledes at det sidste Ziffer af hver Deel rykkes en Plads længere mod høire, f. Ex.

$$27^3 = 2^3 = 8\ldots$$
$$3 \times 2^2 \times 7 = 84$$
$$3 \times 2 \times 7^2 = 294$$
$$7^3 = 343$$
$$19683$$

Bevis: $27 = 20 + 7$ dets Cubus bestaaer altsaa af I) $20^3 = 8000$, II) $3 \times 20^2 \times 7 = 8400$, III) $3 \times 20 \times 7^2 = 2940$ og IV) $7^3 = 343$ ved at sammenligne disse Dele med det vi ved den umiddelbare Sammensætning fik ud, vil det findes at være just de samme Dele, thi 8 paa fierde Plads fra høire mod venstre er = 8000. 84 paa tredie Plads = 8400. 294 paa anden = 2940, og endelig 343 paa Eenernes Plads = 343 (§ 13).

Paa samme Maade findes Cubus af 123.

$$123^3 = 1^3 = 1\ldots\ldots$$
$$3 \times 1^2 \times 2 = 6\ldots\ldots$$
$$3 \times 1 \times 2^2 = 12\ldots\ldots$$
$$2^3 = 8\ldots$$
$$3 \times 12^2 \times 3 = 1296\ldots$$
$$3 \times 12 \times 3^2 = 324\,.$$
$$3^3 = 27$$
$$1860867$$

thi opløses 123 efter forrige § i $120 + 3$, og dets Cubus søges efter Formen, vil den, naar Nullerne bortkastes, bestaae just af de nu fundne Tal.

1. Till. Det første Ziffer i Roden undtagen, giver altsaa ethvert af de følgende, tre nye Zifre i Cubik-Tallet; hvoraf det første indeholder Enerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifres Qvadrat og det nye, det andet Enerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifre og dettes Qvadrat, det tredie Enerne af dettes Cubus.

2. Till. Inddeles altsaa et givet Cubiktal i Classer fra høire til venstre, saa at der kommer tre Zifre i hver Classe, den første undtagen (der kan have eet, to eller tre, eftersom Cubus af Rodens høieste Ziffer indeholder eet, to eller tre Zifre), saa vil Roden bestaae af saa mange Zifre, som der ere Classer; og man vil, naar man begynder fra venstre i den første Classe finde Cubus af Rodens første Ziffer; i den første og anden Classe, Cubus af Rodens to første Zifre o. s. f.

## §. 62.

Cubikroden af ethvert givet heelt Tal findes nu let efter følgende Regler:

1) Man indeler Tallet i Classer fra høire mod venstre tre Zifre i hver Classe, Roden har da saa mange Zifre, som der ere Classer (§ 61).

2) Man søger i Cubik-Tabellen det høieste Cubiktal, der kan trækkes fra første Classes Zifre (fra venstre regnet), dets Rod bliver da det første Ziffer i den søgte Rod (§ 61. Till. 2).

3) Den-

3) Denne Cubus subtraheres fra første Classes Zifre, og til den overblevne Differents nedsættes anden Classe; det tredobbelte af det fundne Rod-Ziffers Qvadrat hensættes i en Parenthese, saa at dets Eenere kommer under det første af anden Classes Zifre, og dermed divideres de overstaaende Tal; den da fundne Qvotient er Rodens andet Ziffer; Denne multipliceres med Divisor, og Produktet (som er just det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffers Qvadrat multipliceret med det andet) hensættes, saa at dets Eenere kommer under det første af anden Classes Zifre. Dernæst søges det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffer og det andets Qvadrat, som sættes med dets Eenere under anden Classes andet Ziffer; endelig hensættes Cubus af Rodens andet Ziffer, saa at dens Eenere kommer under anden Classes tredie Ziffer. Disse tre Dele adderes nu tilsammen, er den da udkommende Sum større end de lige over staaende Tal (som er den af første Classe blevne Differents forenet med anden Classe), da er Rodens andet Ziffer taget for høit. Er den derimod iet op saa stor eller mindre, da er det fundne Ziffer virkelig det andet Ziffer af den forlangte Rod.

4) Den fundne Sum subtraheres nu fra de lige over staaende Tal, og til den da blevne Differents nedsættes tredie Classes Zifre. Af de to al-

lerede fundne Rod-Zifres Qvadrat tages nu det tredobbelte og hensættes, at Eenerne komme under det første af tredie Classes Zifre; dermed divideres nu de ligeover staaende Tal, og den fundne Qvotient er Rodens tredie Ziffer; nu fortfares i samme Orden, som i No. 3 er forklaret, og saaledes vedbliver man med 4, 5 og 6 Classe &c.

5) Bliver tilsidst intet tilovers, saa har man fundet den forlangte Rod fuldkommen nøiagtigt, og det givne Tal er et fuldkomment Cubiktal. Bliver der derimod en Rest, saa er det givne Tal et ufuldkomment Cubiktal, og dets Rod et irrational Tal.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saavel af de næst foregaaende §er, som og deraf, at, naar den, efter disse Regler af et givet Tal fundne Cubik-Rod, igien ophøies til tredie Værdighed eller cuberes, udkommer just det givne Tal.

Tal-Exempler:

$\sqrt[3]{15625}$. $\sqrt[3]{1860867}$. $\sqrt[3]{80677568161}$.

$$\sqrt{15|625} \dagger 25$$

$$2^3 = 8$$

$$7625$$

$$3 \times 2^2 = (12)$$

$$\begin{aligned} 3 \times 2^2 \times 5 &= \begin{cases} 60 \\ 150 \\ 125 \end{cases} \\ 3 \times 2 \times 5^2 &= \\ 5^3 &= \end{aligned}$$

$$7625$$

$$\cdots\cdots$$

Ex-

Efter Reglen 1, deles Tallet ind i 2 Classer. Tallet 8 hensættes efter No. 2, og dets Rod er efter samme Rodens første Ziffer; efter No. 3 sættes Divisoren 12 og Produkterne 60, 150 og 125, hver paa sit Sted, og samlede til en Sum subtraheres de fra de overstaaende Tal efter No. 4. Da intet blev tilovers, er efter No. 5 den forlangte Rod nøiagtig 25, og Tallet var altsaa et fuldkomment Cubiktal.

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{1 \mid 860 \mid 867} \dagger 123$ |
| $1^3 =$ | 1 |
| | 860 |
| $3 \times 1^2 =$ | (3) |
| $3 \times 1^2 \times 2 =$ | 6 |
| $3 \times 1 \times 2^2 =$ | 12 |
| $2^3 =$ | 8 |
| | 728 |
| | 132,867 |
| $3 \times 12^2 =$ | (43 2) |
| $3 \times 12^2 \times 3 =$ | 129 6 |
| $3 \times 12 \times 3^2 =$ | 3 24 |
| $3^3 =$ | 27 |
| | 132,867 |
| | ,,,,,, |

Anm.

Anm. I Steden for efter 3die og 4de Reg. at samle de tre Produkter til een Sum, og derpaa subtrahere denne fra de lige over staaende Tal kan ethvert Product, sat paa sit Sted efter 3die Reg., strax subtraheres fra det lige over staaende Tal, hvilket almindelig bruges i den praktiske Regning. Det anførte Exempel $\sqrt[3]{15625}$ vilde da staae saaledes:

```
∛15|625|25
  8|   |
  7|6
 (12)
  60
  162
  150
   125
   125
   000
```

$\sqrt[3]{}$ 80 | 677 | 568 | 161 † 4321
64

16,677
(48)
144

227
108

1197
27

1170,568
(5547)
11094

6116
516

56008
8

56000,161
(55987 2)

129 6
129 6

1
1

§. 63.

Cubik-Roden af en Decimalbrøk findes, ved at føie til Brøken paa høire Side, saa mange Nuller man vil (dog at man iagttager, at Decimalernes Antal bliver deelbar med 3), og derpaa udtrekke Ro-

Roden efter § 62. Den fundne Rod vil da have saa mange Decimaler, som der vare Classer af Decimaler i Tallet, hvoraf Roden skulde udtrækkes. F. Ex. skal Cubik-Roden søges af 78,4, skeer det saaledes: 78,4 = 78,400,000,000 (§ 49.)

$$\sqrt[3]{78,4} = \sqrt[3]{78,400,000,000} \dagger 4,279$$

```
 64
 ----
 14,400
 (48)
 96
 ----
 480
  48
 ----
 4320
    8
 ----
 4312,000
 (5292)
 37044
 -----
 60760
  6174
 -----
 545760
    343
 ------
 545417,000
 (546987)
 4922883
 -------
 5322870
  103761
 -------
 5219109
     729
 -------
 52190361
```

Den

Den søgte Cubic-Rod af 78,4 fandtes altsaa at være 4,279; men det overblevne viser, at Roden ikke nøiagtig er funden; man kan, ved at tilføie flere Nuller, blive ved at fortsætte Udtrækningen, og hvor længe dette bør skee, bedømmes efter den større eller mindre Grad af Nøiagtighed, som Regningen udkræver.

1. Till. Cubik-Roden af enhver Brøk findes altsaa lettest, ved at forandre den til en Decimalbrøk, og deraf uddrage Roden. F. Ex. $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$.

$\frac{3}{7} = 0,428571428 \ldots$ altsaa $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} =$

$\sqrt[3]{0|428|571|428} = 0,753 \ldots$

```
343
85,5
(147)
735
1207
 525
6821
 125
6696,428
(1687 5)
5062 5
1633 92
  20 25
1613 678
      27
1613 651
```

2. Tillæg. Cubik-Roden af et ufuldkomment Cubik-Tal, findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøk ved at føie til Tallets høire Side, saa mange Gange tre Nuller, som man vil have Decimaler i Roden, og deraf at udtrække Cubic-Roden efter § 62, f. Ex. $\sqrt[3]{2}$ findes saaledes:

```
3
√2|000|000|000| 1,259
 1|
———
 1,000
  (3)
   6
———
   40
   12
———
   280
     8
———
   272,000
   (43 2)
   2160
———
    5600
     900
———
    47000
      125
———
    46875,000
    (46875)
    421875
———
     468850
      30375
———
     4384750
          729
———
     4384021
```

Thi da 2 = 2,000,000,000 (§ 49), saa er $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2,000,000,000} = 1,259$. Ved at tilføie flere Classer af Nuller, vil man kunde finde Roden saa nøiagtig, som Omstændighederne udfordre, men fuldkomment nøiagtig lader den sig ikke bestemme (see § 54).

## Om Forhold og Proportioner.

§. 64.

Forhold (ratio) kaldes en Sammenligning imellem 2 ligeartede Størrelser *a* og *b*; ved Sammenligningen kan haves Hensyn enten til Størrelsernes Forskiel ɔ: den tredie Størrelse *d*, som maa legges til eller tages fra *a*, for at frembringe *b*, og da kaldes Forholdet arithmetisk: eller og til det Tal *m*, som viser hvor mange Gange *b* indeholdes i *a* eller *a* i *b*, i dette Tilfælde hedder det et geometrisk Forhold. F. Ex., sammenlignes Tallene 20 og 5 med Hensyn til Tallet 15, som maa tages fra 20, for at frembringe 5, da betragtes disse Tals arithmetiske Forhold til hinanden; haves derimod Hensyn til, hvor mange Gange 5 indeholdes i 20, da undersøges deres geometriske Forhold.

1. Till. Til et Forhold hører altsaa nødvendigt to Størrelser, som kaldes Lede i Forhol-

det

det (termini rationis), hvoraf det, der sættes først kaldes det foregaaende (antecedens), og det der sættes sidst det efterfølgende (conseqvens). Begge disse Lede maa efter § 17 og 25 altid være ligeartede Størrelser. Den Størrelse *d* i et arithmetisk Forhold, som legges til eller tages fra det foregaaende Led, for at frembringe det efterfølgende, kaldes Forholds Navn eller Forholds Størrelse (nomen rationis); og Tallet *m* i et geometrisk Forhold, som viser, hvor mange Gange det eene Led indeholdes i det andet, kaldes Forholds Exponent (exponens rationis).

2. Till. Til at udtrykke det arithmetiske Forhold imellem to Størrelser, betiener man sig af Subtractions-Tegnet, som sættes imellem Størrelserne saaledes: $a - b$, $8 - 13$, og læses *a* forholder sig til *b*; 8 forholder sig til 13, og til at betegne det geometriske Forhold, bruger man Divisions-Tegnet (:), der sættes imellem de sammenlignede Størrelser, f. Ex. $a : b$; $24 : 8$, som læses *a* forholder sig til *b*; og 24 forholder sig til 8.

Anmærk. For i denne Lære om Forhold at undgaae Forvirring af Divisionen og det geometriske Forhold, vil jeg udtrykke Divisionen ved Brøk-Tegnet, at *a* divideres med *b*, skrives altsaa stedse $\frac{a}{b}$, og Tegnet (:) bruges allene til at tilkiendegive to Størrelsers geometriske Forhold.

3. Till. Uagtet modsatte Størrelser vel ikke ere ligeartede, saa kan de dog (§ 39) ansees som ligeartede, kun at de adderes, i Steden for at subtraheres, og subtraheres i Steden for at adderes, og altsaa kan de sammenlignes med hinanden, og Forhold har Sted imellem dem. Ligesom og den eene af to modsatte Størrelser kan frembringes af den anden, ved Addition, Subtraction, Multiplication og Division.

Anm. Efter at have fremsat disse Forklaringer, troer jeg det indsees let, hvor vigtig det er at kiende og undersøge Størrelsernes geometriske Forhold, da al deres Udmaaling, som er Mathematikens Hoved-Gienstand, beroer derpaa (§ 2). De Gamle gave ogsaa allene det geometriske Forhold, Navn af Forhold, og naar man endnu i Mathematiken taler om Forhold, uden noget Tillægs Ord, forstaaes altid det geometriske Forhold. Det arithmetiske Forhold synes derimod ikke at være af saa stor Betydenhed, og kunde, uden at betragtes som et særskildt Forhold, henføres under Subtractionen. Dog da det findes i alle nyere mathematiske Lærebøger særskildt afhandlet, vil jeg og her kortelig anføre de vigtigste didhenhørende Sætninger.

## §. 65.

Et arithmetisk Forholds Størrelse bestemmes ved Forholds Navnet (§ 64. 1 Till.); og to arithmetiske Forhold, der have samme Forholds Navn, ere

ere lige store, f. Ex. Forholdet $a - (a \pm d)$ er ligestort med Forholdet $b - (b \pm d)$, da $d$ er Forholds-Navnet i begge; ligeledes $\overset{4}{13 - 17} = \overset{4}{8 - 12}$, da 4 er Forholds Navn i begge. Har to Forhold derimod ulige Forholds Navn, da siges det Forhold, som har størst Forholds Navn, at være større eller høiere, end det der har mindre. F. Ex. Forholdet 5 — 12 er større end Forholdet 13 — 17, fordi Forholds Navnet 7 er $>$ 4.

To lige store arithmetiske Forhold, forbundne med Lighedstegn, udgiøre en arithmetisk Proportion: saaledes siges de fire Størrelser $a, b, c, d$ at være arithmetisk proportionale, eller at udgiøre en arithmetisk Proportion, naar $a - b = c - d$, og læses $a$ forholder sig til $b$, som $c$ til $d$. Ligeledes $7 - 11 = 15 - 19$, og $13 - 8 = 17 - 12$.

1. Till. Enhver arithmetisk Proportion bestaaer altsaa af 4 Lede; hvoraf det første og fierde, som i foregaaende Exempler $a$ og $d$, 7 og 19 kaldes de yderste Lede, og andet og tredie, som $b$ og $c$, 11 og 15 de mellemste. De foregaaende Led i begge Forholdene, hvoraf Proportionen bestaaer, nemlig det første og tredie, kaldes eensstaaende; ligeledes begge de efterfølgende, nemlig andet og fierde.

2. Till.

2. Till. Naar andet og tredie (eller begge de mellemste) Lede i en arithmetisk Proportion ere lige, kaldes Proportionen sammenhængende (continua), og Størrelsen, der er baade andet og tredie Led, kaldes en arithmetisk middel- eller mellem-proportional Størrelse. F. Ex. $8 - 13 = 13 - 18$, hvor 13 er en middel proportional Størrelse mellem 8 og 18.

## §. 66.

I enhver arithmetisk Proportion er Summen af de to yderste Lede liig Summen af de to mellemste. F. Ex. naar $a - b = c - g$, saa er $a + g = b + c$, og naar $7 - 11 = 15 - 19$, saa er $7 + 19 = 15 + 11$.

Beviis. Lad i Forholdet $a - b$ Forholds Navnet være $d$, saa er $b = a \mp d$ (§ 64) er nu Proportionen rigtig, maa (§ 65) i det andet Forhold $c - g$ Forholds Navnet ogsaa være $d$, og følgelig $g$ være $= c \pm d$. De to yderste Led $a + g$ er altsaa $= a + c \pm d$, og de to mellemste $b + c = a \pm d + c$, men disse Summer $a + c \pm d$ og $a \pm d + c$ bestaae just af de samme Dele, og ere følgelig lige store, altsaa og $a + g = b + c$.

Ved Tal-Exempler lader det sig ligeledes vise, da de efterfølgende Lede ere sammensatte af de fore-

gaaende

thi $m \times a = ma$ men i Forholdet $a : ma$ er Exponenten $\frac{1}{m}$ thi $ma \times \frac{1}{m} = a$. Da begge Ledene i et Forhold ere ligeartede Størrelser kan Exponenten altid findes, naar Ledene ere givne, ved at dividere det foregaaende med det efterfølgende ɔ: ved at see hvor mange Gange det efterfølgende indeholdes i det foregaaende § 25.

1. Till. Indeholdes det efterfølgende Led saaledes i det foregaaende at intet bliver tilovers, eller er det en aliqvot Deel deraf (§ 28.) da bliver Exponenten et heelt Tal; f. Ex. i Forholdet $ma : a$ er Exponenten $m$ det er $a$ indeholdes $m$ gange i $ma$. Men indeholdes ikke det hele efterfølgende Led, men vel en aliqvot Deel deraf netop nogle Gange i det foregaaende da bliver Exponenten en Brøk. F. Ex. i Forholdet $a : c$ naar $c$ antages op løst i $n$ lige Deele og $a$ findes at være $= m \times \frac{1}{n} c$ da vil Exponenten i Forholdet $a : c$ være $\frac{m}{n}$ thi Exponenten er $= \frac{a}{c} = \frac{m \times \frac{1}{n} c}{c} = \frac{m \times \frac{1}{n} c}{n \times \frac{1}{n} c} = \frac{m}{n}$. I begge disse Tilfælde siges Forholdet at være rationalt og Exponenten er et bestemt Tal.

2. Till. Kan derimod hverken det efterfølgende Led eller nogen aliqvot Deel deraf nøiagtig udmaale det foregaaende, da siges Forholdet at

være irrationale. Men disse Forhold faa vi i Geometrien Leilighed til nøiere at kiende.

## §. 70.

To geometriske Forhold, der have samme Exponenter, siges at være lige store f. Ex. Forholdet $ma : a$ er lige stort med Forholdet $mb : b$ da $m$ er Exponenten i begge; $20 : 5 = 12 : 3$ thi $4 = 4$. To saadane lige store geometriske Forhold forbundne med Ligheds Tegn udgiøre en geometrisk Proportion: og de fire Størrelser som udgiøre Ledene i disse to Forhold siges at være geometrisk proportionale. F. Ex. $ma : a = mb : b$. $20 : 5 = 12 : 3$. $8 : 24 = 6 : 18$.

Anmærk. Ledene i en geometrisk Proportion benævnes som i en arithmetisk; de to yderste ere $ma$ og $b$, 20 og 3. De to mellemste $a$ og $mb$, 5 og 12. to foregaaende som $ma$ og $mb$, efterfølgende som $a$ og $b$: hvilke kaldes eenstaaende Lede (§ 65. 1. Till.).

Till. Ere i en geometrisk Proportion samme Størrelse baade andet og tredie Led, kaldes den en sammenhængende geometrisk Proportion; og denne Størrelse en geometrisk mellem Proportional-Størrelse. F. Ex. $a : mb =$ [illegible] $63 : 21 = 21 : 7$.

§. 71.

I enhver geometrisk Proportion $a : b = c : d$ er Produktet af de yderste Lede $ad$ lige med Produktet af de mellemste $bc$.

Bev. Naar i Forholdet $a : b$ Exponenten antages at være $m$ da er (§ 69.) $a = mb$ er nu Proportionen rigtig maa efter §. 70. i Forholdet $c : d$ Exponenten ogsaa være $m$ og altsaa $c = md$. Productet af de yderste Lede $ad$ vil da være $mb \times d = mbd$ og Produktet af de mellemste $bc$ vil være $= b \times md = bmd$. men nu er $mbd = bmd$ og følgelig $ad = bc$. Ligeledes er i Proportionen $12 : 4 = 15 : 5$ Produktet af de yderste Lede $5 \times 12 =$ Produktet af de mellemste $4 \times 15$. Thi efter §. 69. kan de efterfølgende Lede udtrykkes ved de foregaaende og Exponenten, hvorved det viser sig, at de mellemste og yderste Lede i en rigtig geometrisk Proportion altid bestaae af de samme Faktorer. Den anførte Proportion kunde f. Ex. udtrykkes saaledes:

$$12 : \frac{12}{3} = 15 : \frac{15}{3}$$

og altsaa $\frac{12 \times 15}{3} = \frac{15 \times 12}{3}$.

Tillæg. I en sammenhængende geometrisk Proportion er Produktet af de yderste Lede saa stort som Quadratet af det ene mellemste; thi i Følge det nylig anførte Beviis er i Proportionen $a : b$

$= b$

$= b : c$; $ac = bb$ men $bb$ er $= b^2$ (§. 52.). og i Proportionen $63 : 21 = 21 : 7$ er $63 \times 7 = 21 \times 21$ men $21 \times 21$ er $= 21^2$ og følgelig $63 \times 7 = 21^2$.

Till. 2. Er Produktet af to Størrelser $ab$ lige stort med Produktet af to andre $cd$ saa udgiøre disse fire Størrelser en geometrisk Proportion, hvori Faktorerne til det ene Produkt ere de yderste, og de andre de mellemste Lede: thi naar

$$ab = cd \text{ saa et } a = \frac{cd}{b} \text{ (§. 38. 5.) altsaa}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b} \text{ og følgelig } a : c = d : b.$$

Till. 3. Er Produktet af to Størrelser $ab$ liig Qvadratet af en tredie $m$, da er denne en mellemproportional Størrelse imellem de to, eller andet og tredie Leed i en sammenhængende geometrisk Proportion.

$$\text{Thi naar } m^2 = ab \text{ saa er } a = \frac{m^2}{b} \text{ og } \frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

(§. 38. 5.) og følgelig $a : m = m : b$. (§. 70.)

§. 72.

Til tre med Tal eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser $a$, $b$, $c$ i en geometrisk Proportion findes den fierde Proportionale $x$, ved at multiplicere de to mellemste $b$, $c$ og dividere det fundne Produkt $bc$

G 3 med

med den første $a$. Saaledes findes $x = \frac{bc}{a}$ f. Ex. $12 : 8 = 16 : x$ da er $x = \frac{8 \times 16}{12} = 10\frac{2}{3}$.

Bev. Naar $x$ er $= \frac{bc}{a}$, saa er $ax = bc$ og altsaa $a : b = c : x$. (§. 70. Till. 2.)

Till. Imellem to med Tall eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser $a, b$ findes en geometrisk mellem proportional Størrelse $x$, ved at multiplicere de givne og af Produktet udtrække Qvadratroden. Saaledes bliver $x = \sqrt{ab}$ f. Ex. naar $18 : x = x : 8$ saa er $x = \sqrt{(18 \times 8)} = 12$. Thi er $x = \sqrt{ab}$ saa er $x^2 = ab$ og følgelig $a : x = x : b$. (§. 70. Till. 3.)

§. 73.

Da en geometrisk Proportion bestaaer af to ligestore Forholde, og Forholdenes Ligestorhed beroer paa deres ligestore Exponenter, saa indsees let at enhver given geometrisk Proportion kan taale alle Forandringer hvorved enten Exponenterne i begge Forholde blive aldeles uforandrede eller og ligemeget forandrede.

Man kan altsaa naar en Proportion er given f. Ex. $ma : a = mb : b$ frembringe en anden

Ved

1) Ved at omsætte de foregaaende og efterfølgende Lede (invertendo); $a : ma = b : mb$ thi i den givne Proportion er Exponenten $m = m$ og altsaa $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$ og følgelig $a : ma = b : mb$ (§. 70.).

2) Ved at tage Summen eller Differencen af begge de foregaaende til Summen eller Differencen af begge de efterfølgende Lede (summando et differentiando) saaledes faaes af Proportionen $ma : a = mb : b$. $\alpha$) summando $ma + mb : a + b = mb : b$; $\beta$) differentiando $ma - mb : a - b = mb : b$ i begge Tilfælde blive Exponenterne uforandrede thi $\frac{ma + mb}{a + b}$ er $= m$ og ligeledes er $\frac{ma - mb}{a - b} = m$. (§. 46.)

3) Ved at tage Summen eller Differencen af det foregaaende og efterfølgende Led til det efterfølgende i begge Forhold, (componendo et dividendo). F. Ex. Af den givne Proportion $ma : a = mb : b$ faaes saaledes $\alpha$) componendo $(ma + a) : a = (mb + b) : b$, $\beta$) dividendo $(ma - a) : a = (mb - b) : b$. Exponenterne forandres her i begge Forhold ligemeget nemlig: i det første Tilfælde ved at forøges med en Eenhed, thi $\frac{ma + a}{a}$ er $= \frac{mb + b}{b}$

$= m$

$= m + 1$. og i det andet ved at forvandsles paa samme Maade da $\frac{ma - a}{a}$ er $= \frac{mb - b}{b}$ $= m - 1$.

4) Ved at ombytte andet og tredie Led (vicissim v. permutando) er f. Ex. $ma : a = mb : b$ saa er ogsaa $ma : mb = a : b$ thi $\frac{ma}{mb}$ er $= \frac{a}{b}$ og altsaa Proportionen rigtig.

Anm. Enhver Proportion kan desuden forandres ved at multiplicere eller dividere med et og samme Tal enten alle Ledene; eller de to foregaaende, eller de to efterfølgende; eller de to i det første Forhold, eller de to i det sidste. Ogsaa ved at multiplicere eller dividere begge Ledene i det første Forhold med et, og Ledene i det andet med et andet Tal.

§. 74.

Naar Ledene i to Proportioner multipliceres efter Ordenen med hinanden give Produkterne en rigtig Proportion. F. Ex.

naar $ma : a = mb : b$

og $nc : c = nd : d$

saa er $mnac : ac = mnbd : bd$

Beviis. [illegible] første Proportions Exponent er $m$ i den anden [illegible] følgelig $m = m$ og $n = n$ altsaa $mn = mn$. Nu er i den fremdragte Pro-

Proportion $\frac{ma\,ac}{ac} = \frac{mb\,bd}{bd} = mn$ (§. 46)

og altsaa er den rigtig. (§. 76)

Till. 1. Ere to Proportioner af den Art at de efterfølgende Led i den første ere de foregaaende i den anden; saa forholder det første foregaaende i den første Proportion sig til det første efterfølgende i den anden som det andet foregaaende i den første til det andet efterfølgende i den anden.

F. Ex. er $ma : a = mb : b$
og $a : c = b : d$

saa er (ordinatim et ex æqvo) $ma : c = mb : d$
thi $maa : ac = mbb : bd$ (§. 74.) og naar Ledene i det første Forhold divideres med $a$ og i det andet med $b$ (§. 73 Anm.) saa fremkommer $ma : c = mb : d$.

Till. 2. Ere to Proportioner af den Art at det andet Led i den første er det første i den anden og det tredie i den første det fierde i den anden: saa forholder det første Led i den første Proportion sig til det andet i den anden, som det tredie i den anden til det fierde i den første.

F. Ex. er $ma : a = mb : b$
og $a : c = d : mb$

saa er (perturbate et ex æqvo) $ma : c = d : b$

thi efter §. 74. er $maa : ac = mbd : bmb$ og naar (§. 73. Anm.) Ledene i det først Forhold divideres med $a$ og i det andet med $mb$ saa er $ma : c = d : b$.

§. 75.

Staar en Størrelse $A$ i en saadan Forbindelse med en anden Størrelse $B$ at naar en vis Deel af den eene $a$ giver en Deel af den anden $b$, saa skal ogsaa $a$ gientaget et vist Antal gange $m$ give $b$ gientaget ligesaa mange Gange: saa siges $A$ og $B$ at være i et direct Forhold. ɔ: $a : ma = b : mb$, og $a : b = ma : mb$; Et saadant Forhold har Sted imellem Vare og deres Værdie. Er derimod en Størrelse $C$ i saadan Forbindelse med en Størrelse $D$ at naar en vis Deel af den eene $c$ giver en Deel af den anden $d$; saa skal $c$ gientaget et vist Antal Gange $m$, give $d$ formindsket ligesaa mange Gange ɔ: $mc$ skal give $\frac{1}{m} d = \frac{d}{m}$: saa siges $C$ og $D$ at være i et omvendt Forhold (ratio inversa) ɔ: $c : mc = d : \frac{1}{m}d = c : d = mc : \frac{1}{m}d$. Et saadant Forhold finder Sted mellem Antallet af Arbeidere som behøves til et vist Værk, og Tiden de dertil behøve.

## Anvendelse af de geometriske Proportioner paa den praktiske Regning.

§. 76.

Den hele saakaldte Regula de tri (de tribus numeris, Reglen om tre) er allene Anvendelsen af det (§. 72.) forklarede Problem til 3 givne Størrelser at finde den fierde geometrisk proportionale. Opløsningen ved ethvert Regula de tri Stykke hvor altid tre Tal ere givne, er altsaa at multiplicere andet og tredie Led med hinanden og dividere Productet med det første Leed. Den udførligere Forklaring om Anvendelsen heraf paa Regningsspørgsmaale som forekomme i det daglige Liv hører ikke til den rene Mathematik; men til den anvendte eller praktiske Regnekunst; jeg vil derfor indskrænke mig blot til at vise dens Brug i nogle Hoved-Tilfælde.

Anm. Hovedsagen ved denne Regels Anvendelse er at kunde bedømme om de givne Størrelser ere af den Art at ethvert Par Dele af den ene ere proportionale til et Par Dele af den anden, og hvorledes Ledene i denne Proportion maa ordnes; dette lader sig nu let giøre efter den (§. 75.) givne Forklaring; og eftersom Størrelserne da ere i et direct eller omvendt Forhold; finder den ordentlige (directa) eller omvendte (inversa) Regula de tri Sted.

§. 77.

De vigtigste Tilfælde som kan henregnes til begge ere

a) til den saakaldte ordentlig Regula de tri

1) Beregning af Vare og deres Værdie, thi da $m$ Gange en vis Deel Vare giver $m$ Gange mere Værdi, saa forholde Varene sig som deres Værdi. F. Ex. naar 3 Alen koste 8 Rdl. hvad koste 9 Alen, og naar 2 Alen koste 7 Rdl. hvormange Alen faaes da for 100 Rdl. opsættes saaledes:

3 Alen : 9 Alen = 8 Rdl. : $x$ Rdl.

7 Rdl. : 100 Rdl. = 2 Alen : $x$ Alen.

2) Rentes-Regning: Da $m$ Gange større Capital giver i samme Tid $m$ Gange mere Rente, og samme Capital i $n$ Gange længere Tid $n$ Gange større Rente: saa forholder Renterne sig som Capitalerne, naar Tiden er den samme; og som Tiderne naar Capitalen er den samme.

Ex. Hvormeget er Renten af 10000 Rdl. i et Aar, naar 100 Rdl. give 4 Rdl. og hvormegen Rente giver en vis Capital i 12 Aar naar den i et Aar give 120 Rdl.

100 Rdl. : 4 Rdl. = 10000 Rdl. : $x$ Rdl.

= 400 Rdl.

1 Aar : 12 Aar = 120 Rdl. : $x$ Rdl.

= 1440 Rdl.

3. Reductions-Regning: Da en benævnt Størrelse forvandles til en anden. F. Ex. een Tønde er 8 Skiepper altsaa er m Tønder = m Gange 8 Skiepper følgelig forholder en Tønde sig til m Tønde som 8 Skiepper til m Gang 8 Skiepper. Ligeledes giøre 13913 Pariser Fod 14400 Danske Fod og m Gange flere af de første m Gange flere af de sidste. Altsaa forholde 13913 Pariser Fod sig til ethvert andet Antal deraf: som 14400 Danske Fod til et Antal deraf som svarer til hiint. F. Ex. hvor mange Skiepper giøre 384 Tønder,

1 Tønd. : 384 Tønd. = 8 Skiepp. : x Skiepp.
= 3072 Skiepp.

Hvormange Danske Fod giøre 210 Par. Fod.

13913 P. F. : 210 P. F. = 14400 D. F.
: x D. F. = $217\frac{4879}{13913}$ D. Fod.

b) Til den omvendte (inversa) Regula de tri høre

1) Beregning af de Arbeidere og den Tid der behøves til et Arbeids Fuldførelse: Thi da m Gange flere Arbeidere bruge m Gange mindre Tid, saa forholder Arbeidernes Antal sig omvendt som Tiderne. Man maa altsaa omvende Forholdet af de givne Størrelser. F. Ex. Naar 7 Arbeidere giøre et vist Arbeide i 20 Dage, hvor lang Tid vilde da 15 Arbeidere bruge: hvilket man opfatte

7 Arbeidere : 15 Arbeidere = 12 Dage : x Dage, da vilde der komme et urigtigt fierde Leed, thi Dagenes Antal voxer ikke som Arbeidernes, men tager af (§. 75.) man maa altsaa sette omvendt. 15 Arbeid. : 7 Arbeid. = 12 Dage : x Dage og x bliver = $\frac{12 \times 7}{15}$ $5\frac{9}{15}$ = $5\frac{3}{5}$ Dag.

2) Beregning af Tiden i hvilken en given Capital kan give samme Rente som en anden giver i en vis Tid; som og hvor stor Capitalen maa være for i en bestemt Tid at give samme Rente som en anden Capital i en anden Tid. Thi da en *m* Gange større Capital giver samme Rente i en *m* Gange kortere Tid; saa forholde her Capitalerne sig omvendt som Tiderne og her maa altsaa bruges det omvendte Forhold.

Exemp. Hvorlænge maa 600 Rdl. staa for at kunde til samme Procent give ligesaa megen Rente som 1000 Rdl. i 4 Maaneder, opsættes ikke 1000 Rdl. : 600 Rdl. = 4 Maaneder : x Maaneder men 600 Rdlr. : 1000 Rdlr. = 4 Maan. : x Maan. og x = $6\frac{2}{3}$ Maan.

Hvor stor maa den Capital være som til samme Procent i 7 Maaneder skal give ligesaamegen Rente som 1000 Rdl. i 9 Maan.

7 Maan. : 9 Maan. = 1000 Rdl. : x Rdl. og x findes = $1285\frac{5}{7}$ Rdl.

3. Beregning af Længden af Tøyer af forskiellig Brede som skal anvendes til samme Brug. Thi da af et *m* Gange bredere Stykke fordres *m* Gange mindre Længde; saa forholder Længden sig omvendt som Breden. Ex. Naar af et Stykke Klæde 10 Qvarter bredt bruges 3 Alen til en Kiol, hvor mange Alen bruges der da naar Klædet er 6 Qvarter bredt. Opsættes: 6 Qvart. : 10 Qvart. = 3 Alen : $x$ Alen og $x$ findes $= \frac{3 \times 10}{6} = 5$ Alen.

Anm. Den saakaldte Regula de qvinqve (Reglen om fem) og Klædereglen ere intet andet end Anvendelse af hvad der (§. 74.) er lært om geometriske Proportioner; og det maa her være nok allene at giøre den Anmærkning, at det første Leed i Proportionen begynder med en Størrelse af samme Art som den der skal forvandles, det andet ender med en Størrelse af samme Slags som den søgte, og Størrelsen som skal forvandles udgiør det tredie Led. F. Ex. Naar 4 Ducater giøre 11 Rdl. og 6 Rdl. giør 5 Rubler hvor mange Rubler udgiøre da 100 Ducater.

Opsættes saaledes:

$$\begin{array}{llll} 4 \text{ Duc.} : 11 \text{ Rdl.} & = & 100 \text{ Duc.} & : x \text{ Rdl.} \\ 6 \text{ Rdlr.} : 5 \text{ Rubl.} & = & x \text{ Rdlr.} & : y \text{ Rubl.} \\ \hline 4 \times 6 : 11 \times 5 & = & 100 & : y \text{ Rubl.} \\ 24 : 55 & = & 100 & : 225 \text{ Rubl.} \end{array}$$

Videre Udførelse af disse Regler finder her ikke Stæd; men maa søges i de egentlig praktiske Regnebøger.

# Geometrie.

## Indledning.

### §. 1.

Forklar. Geometrien (Maale-Videnskaben) betragter de sammenhængende udstrakte Størrelser (Rummet Prolegom. §. 4.). Det hele uendelige Rum og enhver Deel deraf, for saavidt den er udstrakt til alle Sider kaldes et legemligt Rum (spatium solidum). Et saadant til alle Sider udstrakt, og begrændset Rum kaldes et geometrisk Legeme (corpus geometricum) da Geometrien bestandig har alene Hensyn til Udstrækningen af Legemet eller Rummet som det opfylder uden at betragte dets øvrige Egenskaber. Saaledes f. Ex. bestemmes Udstrækningen eller den geometriske legemlige Størrelse af en Kugle ved den hule Form hvori den er støbt, uden at der haves Hensyn til Materien hvoraf den er

Grænd-

Grændserne af et geometrisk Legeme eller de yderste Dele, hvor Legemet ophører kaldes Flader; Grændserne af en Flade Linier; og Grændserne af en Linie Punkter.

Till. 1. Legemet (Fig. 1.) har altsaa tre Dimensioner (Udmaalninger) Længde, Brede og Dybde (Høyde v. Tykkelse). Fladen allene to, Længde og Brede; Linien een nemlig Længde og Punktet ingen.

Anm. Benævnelserne af et Legems Længde, Brede v. s. v. ere vilkorlige; almindeligt kalder man den største Udstrækning Længde og den mindre i samme Flade Brede; og ved Benævnelserne af Høyde, Dybde og Tykkelse kommer saavel Legemets Beliggenhed som Standpunktet hvorfra det sees i Betragtning.

Till. 2. Da Grændsen af en Ting ikke er en Deel af Tingen, men tvertimod dens Ophør, saa er Fladen ikke en Deel af Legemet; Linien ikke en Deel af Fladen og Punktet ikke af Linien. Utallige Punkter udgiøre derfor ingen Linie; utallige Linier ingen Flade og utallige Flader intet Legeme. Enhver nok saa liden Deel af et Legeme er altsaa selv et Legeme; af en Flade selv en Flade og af en Linie selv en Linie.

Anm. Heraf sees ogsaa at det aldeles ikke er muligt at tegne geometriske Punkter, Linier og Flader. Da alle tegnede Punkter, Linier og Flader ere virkelig

kelige physiske Legemer; hvis Udstrækning i Rummet er et geometrisk Legeme. Vi maa altsaa ved de tegnede Punkter afsondre (abstrahere) Begrebet fra all Udstrækning i Almindelighed; ved Linier fra all Brede og Tykkelse ved Flader fra all Tykkelse.

§. 2.

Forkl. At dele en sammenhængende Størrelse i to Dele er at bestemme den fælles Grændse for begge Dele; et legemligt Rum deles altsaa ved Flader; en Flade ved Linier og en Linie ved Punkter.

Till. Da Rummet overalt hvor man vil, kan begrændses, saa kan man i enhver Flade forestille sig utallige Arter af begrændsede Flader, og i ethvert legemligt Rum utallige Arter af Legemer. Den geometriske Deling af Rummet gaaer altsaa i det uendelige.

§. 3.

Forkl. Tænker man sig et Punkt (som er uden all Udstrækning §. 1.) sat i Bevægelse, saa følger, at det ved sin Bevægelse giennemløber en Vey eller en Længde uden all Brede og Tykkelse det er en Linie. Bliver nu Retningen af Punktet under dets Bevægelse uforandret saa beskriver det en ret Linie (recta) $AB$ (Fig. 2.) og kommer fra et Sted til et andet paa den korteste Vey.

For-

Forandres derimod bestandig Punktets Retning under Bevægelsen saa beskriver det en krum Linie (curva) (Fig. 2.)

Anm. Begrebene om rette og krumme Linier ere saa enkelte at de ikke lade sig definere eller giøre forstaaelige ved Forklaring; da vi nødes at forklare Linie ved Retning og Retning igien ved Linie. Imidlertid indeholder den anførte Forklaring den første og simpelste Forestilling vi kan giøre os om rette og krumme Linier.

Till. En ret Linie *AB* (Fig. 2.) er altsaa den korteste Afstand imellem dens Ende Punkter *A* og *B*; og ved to Punkter bestemmes Beliggenhed af enhver ret Linie, og naar de ere Endepunkter tillige Liniens Længde thi da den rette Linie fremkommer ved Punktets uforandrede (i samme Retning fortsatte) Bevægelse og den kun kan være een, saa følger at alle de rette Linier, man i Tankerne vilde forestille sig trukne fra *A* til *B* maatte falde sammen med *AB*. Da derimod den krumme Linie fremkommer ved Punktets forandrede Retning, saa følger at der imellem to Punkter gives utallige krumme Linier.

§. 4.

Forkl. En Flade, hvori der fra ethvert givet Punkt til et andet kan trækkes en ret Linie, hvis Dele alle ligge i samme Flade, kaldes en ret

Flade eller Plan (planum); den hvori dette ikke lader sig giøre er en krum Flade.

Till. For saavidt Geometrien befatter sig allene med Udstrækninger der alle ligge i samme Plan kaldes den plan Geometrie eller Planimetrie; naar den derimod handler om Legemer og betragter to og flere Flader tillige samt deres Bøjning mod hinanden ja endog krumme Flader, faaer den Navn af solid (legemlig) Geometrie eller Stereometrie.

§. 5.

Grundsæt. (axioma) Udstrækninger der dække hinanden (congruunt) ɔ: der kan lægges saaledes paa hinanden, at deres Grændser falde sammen: eller der i Henseende til Qvantitæt og Qvalitet ere saa fuldkommen eens, at de kan sættes i hinandens Stæd; ere ligestore og ligedanne.

Anm. Udstrækninger kan være ligestore uden at dække hinanden; man maa derfor giøre Forskiæl imellem Fladers Ligestorhed af deres Congruents; og Ligestorhed uden Congruents.

Fordringsf. (postulata) 1) Igiennem to givne Punkter at trække en ret Linie og forlænge den igiennem dens Endepunkter uden Ende til begge Sider. 2) Ved Hielp af Passeren i en Plan at beskrive en Cirkel.

# Plan Geometrie.

## Om de forskiellige Arter af Figurer og i Særdeleshed om Cirklen.

§. 6.

Forkl. Bøjningen (Heldingen) som to rette Linier i samme Plan, *CA* og *CB* (Fig. 3.) have mod hinanden, naar de uden at være hinanden direkt modsatte (d. e. uden at udgiøre en ret Linie) støde sammen i et Punkt *C*, kaldes en retlinet Plan-Vinkel, undertiden allene en Vinkel (angulus). Punktet *C* hvor Linierne støde sammen, Vinklens Spidse eller Toppunkt (vertex anguli) og Linierne selv dens Sider eller Been (crura).

Anm. En Vinkel benævnes enten allene ved Bogstavet ved dens Toppunkt f. Ex. (Fig. 3.) Vinklerne *C* og *D* eller og ved tre Bogstaver, da Toppunktets Bogstav altid maa staae i Midten: f. Ex. (Fig. 3.) Vinklen *ACB* eller *BCA*. Undertiden ved smaa Bogstaver som sættes inde i Bøjningen f. Ex. (Fig. 40.) Vinklerne *m*, *n*.

Till. Vinklens Størrelse beroer ikke paa Liniernens Længde men allene paa deres Bøjning eller Skraahed mod hinanden; Vinklerne (Fig. 3.) *C* og *D* ere altsaa ligestore naar ved at lægges paa hinanden deres Toppunkte og Sider falde sammen

skiønt Linierne *DE* og *DF* ere længere end *CA* og *CB*.

§. 7.

Forkl. To Vinkler *ACD* og *DCB* (Fig. 4.) som have en fælles Side og et fælles Toppunkt og hvis yderste Sider ere hinanden direkt modsatte d. e. udgiøre en ret Linie kaldes Naboe-Vinkler (anguli contigui f. deinceps positi). Ere de begge ligestore som *ACD* og *DCB* (Fig. 5.) kaldes de rette Vinkler (anguli recti). En ret Vinkel er altsaa den, der er ligestor med sin Naboevinkel. Enhver anden Vinkel er skiæv og i Særdeleshed stump, naar den er større, og spids, naar den er mindre end en ret. (Fig. 4.)

Anm. En ret Vinkel betegnes i det følgende bestandig med Bogstavet *R*.

Till. En Linie *CD* (Fig. 5.) siges at være lodret (perpendicularis, normalis) paa en anden *AB*, naar den dermed giør rette Vinkler.

§. 8.

Forkl. En plan Figur, er en paa alle Sider begrændset Plan; da Grændserne af en Plan ere Linier §. 1. og disse kan være rette eller krumme, saa ere plane Figurer retlinede, krumlinede og blandetlinede, eftersom deres Grændser

ere

ere rette, krumme eller baade rette og krumme Linier.

Till. 1. To rette Linier kan umuligt (§. 3. Till.) have flere end et Punkt tilfælles nemlig det hvori de forlængede skiære hinanden; og de kunde altsaa umuligt udgiøre Grændserne for en Plan.

Till. 2. De retlinede Figurer inddeles derfor efter Liniernes Antal, der indslutte Planen og kaldes Figurens Sider, i Triangler, Fiirkanter og Mangekanter (Fig. 9. 10. 11.) eftersom de have tre, fire eller flere Sider.

Forkl. En Triangel er ligesidet (æqvilaterum) naar alle tre Sider ere ligestore som *ABC* (Fig. 13.); ligebenet (æqvicrurum, isoscele) naar de to Sider ere ligestore som *DFE* (Fig. 14.). Uligesidet, naar ingen af Siderne ere ligestore som *IGH* (Fig. 15).

En firsidet Figur, kaldes: naar den har fire ligestore Sider og rette Vinkler en Qvadrat; fire ligestore Sider men skiæve Vinkler en Rhombus; to og to modstaaende Sider ligestore og rette Vinkler en Rectangel; og naar allene de modstaaende Sider ere ligestore men Vinklerne skiæve en Rhomboides (Fig. 45. 46. 47. 51.) alle øvrige firsidede Figurer faa Navn af Trapesier (Fig. 10.).

De

De mangesidede Figurer (polygoner) faae efter Sidernes Antal Navn af Femkanter, Sexkanter o. s. v.

De retlinede Figurer ere enten regulaire (ordentlige v. regelmæssige) naar alle deres Sider og Vinkler ere ligestore; eller irregulaire (uregelmæssige) naar de er ulige store.

§. 9.

Forkl. En Cirkel (circulus) (Fig. 12.) er en Plan, som begrændses af en eeneste i sig selv tilbageløbende krum Linie, hvori ethvert Punkt ligger ligelangt borte fra et vist Punkt i den begrændsede Plan som kaldes Cirklens Middelpunkt (centrum). Den krumme Linie kaldes Cirklens Peripherie eller Cirkellinien. De rette Linier *CD* og *CB* som kan trækkes fra Centrum til Peripherien og som alle ere lige lange, Radier. En ret Linie *MN* fra et Punkt i Peripherien til et andet kaldes en Korde (Streng) og naar den gaaer igiennem Centrum en Diameter (Giennemmaaler). En Diameter er altsaa saa stor som to Radier, og alle Diametre i samme Cirkel ligestore. En Linie *HI*, der berører Cirklen i et eneste Punkt og ellers ligger aldeles uden for Cirklen kaldes en Tangent (Berøringslinie). Forlænges Chorden udenfor Cirklen har man en Sekant (Skiæ-

(Skiæringslinie) *KL*. Fladen, som indsluttes af to Radier og et Stykke af Peripherien kaldes et Udsnit (sector) *ACD*; indsluttes den derimod af en Chorde og en Bue et Affsnit (segment) *MN*.

Till. En Cirkel beskrives, naar en ret Linie *CB* dreier sig i en Plan omkring dens ubevægelige Endepunkt *C*. Linien selv vil da beskrive Cirkelfladen, det ubevægelige Punkt bliver Centrum, og det andet Endepunkt beskriver Peripherien.

Anm. 1. Cirkles beskrives paa Grund heraf ved et Instrument som kaldes Passer eller Cirkel-Passer (§. 5.).

Anm. 2. Peripherien af enhver Cirkel indeles i Almindelighed i 360 ligestore Dele som kaldes Grader. En Grad er altsaa en abestemt Størrelse og betegner $\frac{1}{360}$ Deel af enhver Cirkels Peripherie. Graden inddeles igien til at udmaale mindre Dele af Peripherien i 60 Minuter og en Minut igien i 60 Sekunder. For Korthedsn Skyld betegnes Grader ved °, Minuter ved ′ og Sekunder ved ″. F. Ex: 24° 35′ 47″ læses 24 Grader 35 Minuter og 47 Sekunder.

§. 10.

Læres. Ere i en og samme Cirkel eller i to ligestore Cirkler Vinklerne ved Centrum (ↄ: de Vinkler hvis Toppunkt ligge i Cirklens

Cen-

Centrum og hvis Sider ere Radier) ligestore, da ere Buerne hvorpaa de staae, ogsaa ligestore.

Beviis: Lad (Fig. 16 og 17.) Vinklerne DCE ~~$CDE$~~ og $GCB$ være ligestore, og lad Vinkelspidserne $C$ være lagte paa hinanden, da vil (§. 6.) Linien $CD$ falde paa $CG$ og $CE$ paa $CB$ og da Linierne ere ligestore (§. 9.) Punkterne $D$ og $E$ paa $G$ og $B$ og følgelig Buen $DE$ paa Buen $GB$.

Till. 1. Trækkes i en Cirkel en Diameter $AB$ (Fig. 17.) og en anden Diameter $DE$ lodret paa den første, da blive Vinklerne ved Centrum rette og følgelig lige store (§. 7. Till.) Peripherien af Cirklen deles da efter den anførte Læresætning i fire ligestore Buer eller Qvadranter hver til 90° (§. 9. Anm. 2.).

Till. 2. At maale en Vinkel er egentlig at bestemme Liniernes Bøyning mod hinanden, dette skeer ved at sammenligne den med den rette Vinkel, da ved at tilkiendegive hvor stor en Part den er af en ret Vinkel, Liniernes Afvigelse tillige bestemmes. Saaledes f. Ex er Vinkelen $FCB$ (Fig. 17.) $= \frac{1}{3} R$ ɔ: Liniernes Afvigning er saaledes, at Afvigningen af de Linier der giøre en ret Vinkel er tre Gange saa stor. For beqvemmere at kunde anstille denne Sammenligning antager man almindelig

delig

delig $\frac{1}{90}$ af en ret Vinkel til Maalestok og bestemmer enhver anden Vinkels Størrelse ved at see hvor ofte den antagne $\frac{1}{90}$ *R* indeholdes deri; og da man ved at ansee Vinklerne som Centervinkler og sammenligne Buerne de staa paa, finder at der er samme Forhold imellem Buerne som imellem Vinklerne; saa udmaales almindelig i Stædet for Vinklen Buen imellem Vinklens Been, da man ved at sammenligne den maalte Bue med 90° som er den Bue en ret Vinkel staaer paa (Till. 1.) findet, hvor stor en Part den givne Vinkel er af en ret f. Ex. naar Buen *FB* (Fig. 17.) er 30° saa er Vinklen $FCB = \frac{1}{3} R$, da 30° er $= \frac{1}{3} \times 90°$.

Anm. Til mekanisk Udmaalning af Vinkler betiener man sig af en Transporteur, som er en halv Cirkel inddeelt i sine 180 Grader.

§. 11.

Forkl. Cirkler beskrevne fra samme Center med forskiellige Radier kaldes concentriske. (Fig. 16. 17.); men beskrevne fra forskiellige Centrer ere de excentriske. (Fig. 18. 19.)

Cirkler siges at skiære hinanden naar en Deel af den eenes Peripherie ligger i Fladen af den anden. En ret Linie skiærer en Cirkel naar nogle

Dele

Dele af Linien ligge uden og nogle inden for Cirkellinien.

Læresæt. Excentriske Cirkler skiære hinanden naar Middelpunkternes Afstand er mindre end Radiernes Summa, men større end deres Differentz.

Beviis: Middelpunkternes Afstand er (Fig. 19.) $AC$, Radiernes Summa $CD + AB$.

Altsaa er $CD + AB > AC$

$$\begin{aligned} CD + AB &> AC \\ CD &= CD \quad (\S.\ 9.) \\ \hline AB &> AC - CD \\ AB &> AD. \end{aligned}$$

følgelig Punktet $D$'s Afstand fra Centrum $A$ mindre end Radius $AB$ og Punktet $D$ i Fladen af Cirklen hvis Radius er $AB$ (§. 9.).

Till. Er Middelpunkternes Afstand (Fig. 18.) $AC$ = Radiernes Summa $CD + DA$ eller deres Difference da vil Cirklerne røre hinanden.

## Om Triangler, især om deres Ligestorhed.

§. 12.

Plane Figurer ere ligestore naar de dække hinanden, eller passe paa hinanden (§. 5.). At to Triangler følgelig ogsaa ere ligestore, naar alle tre

tre Sider og Vinkler ere stykkeviis ligestore er af sig selv klart; thi de vil da nødvendig dække hinanden. Men til at indsee at Ligestorheden af to Triangler ogsaa kan kiendes uden at vide om alle tre Sider og Vinkler ere ligestore, tiene de nu følgende Sætninger.

Læresæt. Naar i Trianglerne $ACB$ og $DFE$ (Fig. 20. 21.) Vinklen $A$ er $= D$, Siden $AC = DF$ og $AB = DE$ da vil Trianglerne dække hinanden og være ligestore. ɔ: To Triangler ere congruente naar to Sider og den indsluttede Vinkel i den ene ere ligesaa store som i den anden.

Beviis: Naar Trianglen $DFE$ antages at være lagt paa $ABC$ maa, da Vinklen $A$ er $= D$, Linien $DF$ falde paa $AC$ og Linien $DE$ paa $AB$ og da $AB$ er antaget $= DE$ og $AC = DF$ maa Punktet $F$ falde paa $C$ og $E$ paa $B$ og Linien $CB$ maa da (§. 3. Till.) nødvendig falde sammen med Linien $FE$.

Till. To Sider og den deraf indsluttede Vinkel bestemme altsaa fuldkommen en Triangel, og af disse Stykker lade sig kun tegne een Triangel, men vel i forskiellig Beliggenhed.

§. 13.

§. 13.

Læresæt. Naar i en ligebenet Triangel $ABC$ (Fig. 27.) en Linie $BD$ antages at dele Vinklen $B$ som indsluttes af de to lige lange Been i to lige Dele; da deler den hele Triangelen i to ligestore Triangler, og staar tillige lodret paa Linien $AC$.

Beviis: Efter Betingelsen er Linien $AB = BC$, Vinklen $ABD = DBC$ og $BD = BD$ følgelig (§. 12.) Trianglen $ADB = BCD$ og Vinklen $ADB = BDC = R$ (§. 7.) altsaa Linien $BD$ lodret paa $AC$; og $AD = DC$

Till. 1. Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Triangel ɔ: de Vinkler der staa lige over for de to lige store Sider, ere ligestore.

Till. 2. Naar Linien $BD$ (Fig. 27.) staaer midt paa Grundlinien og lodret maa den dele Vinklen ved $B$ i to lige Dele. Thi der maatte ellers gives en anden ret Linie som deelte Vinklen $B$ i 2 lige Dele og som i Følge Læresætningen skulde ogsaa staa midt paa Grundlinien, men dette er umuligt (§. 7.).

§. 14.

Læresæt. To Triangler ere congruente naar alle tre Sider ere Stykkeviis ligestore i dem begge.

Bev.

Bev. 1. Tilfælde: Trianglerne være *GKI* og *GHI* (Fig. 24.) Siden *GI* = *GI*; *GK* = *GH* og *KI* = *IH*; lad en Linie trækkes fra *K* til *H*; saa er Triangelen *KIH* ligebenet og Vinklen *HKI* = *KHI* (§. 13. Till. 1.) ligesaa i Triangelen *KGH* er Vinklen *HKG* = *KHG* og *HKI* + *HKG* = *KHI* + *KHG* ɔ: Vinklen *GKI* = *GHI* og følgelig Trianglen *GIK* = *GIH* (§. 12.).

2. Tilfælde: Trianglerne være *ACB* og *ADB* (Fig. 25.) Siden *AB* = *AB*; *AC* = *AD* og *BC* = *BD* saa er Trianglen *ACD* ligebenet; Vinklen *C* = *D* og Trianglen *ACB* = *ADB* (§. 12.).

3. Tilfælde: Trianglerne være *ACB* og *ABD*; (Fig. 26.) Siden *AB* = *AB*; *AC* = *AD* og *BC* = *BD*. Lad en Hielpelinie trækkes fra *C* til *D*; saa er Triangelen *CAD* ligebenet og Vinklen *ACD* = *ADC*. Triangelen *CBD* er ogsaa ligebenet og deri Vinklen *BCD* = *BDC* altsaa (§. 13. Till. 1.) *ACD* — *BCD* = *ADC* — *BDC* ɔ: Vinklen *ACB* = *ADB* og Trianglen *ACB* = *ADB* (§. 12.)

Till. Tre Sider bestemme altsaa en Triangel, og af tre givne Linier lade sig kun tegne een Triangel, men i forskiellig Beliggenhed.

§. 15.

§. 15.

Lærs. Triangler ere ligestore, naar een Side og to Vinkler ere ligestore i dem begge.

Beviis: Naar i Trianglerne *ACB* og *DEF* (Fig. 21 og 23.) antages Siden *AB* = *DE*, Vinklen *A* = *D* og *B* = *E* saa maa naar Triangelen *ACB* lægges paa *DEF* saa at Vinkelspidsen *A* falder paa *D*, Linien *AB* falde paa *DE*, og *AC* paa *DF*; fremdeles da *AB* efter Betingelsen er = *DE*, Punktet *B* paa *F* og Linien *BC* paa *FE*. Nu er Spørgsmaalet om Punktet *C* falder sammen med *E*; og det indsees ved en indirect Demonstration (Prol. §. 10.) thi antages *C* at falde enten oven eller neden for *E* maa Vinklen *B* blive større eller mindre end *F* som er mod Betingelsen.

§. 16

Lærs. Toe Naboe Vinkler udgiore altid tilsammentagne to rette Vinkler.

Bev. Vinklerne være *ACD* og *DCB* (Fig. 4.) lad Linien *CE* antages lagt saa at Vinklen *ACF* bliver = *ECB* = *R* (§. 7.) saa er *ACE* + *ECB* = 2*R*; nu er *ACE* + *ECD* = *ACD* og følgelig *ACD* + *DCB* = 2*R*.

Till.

Till. Tre eller flere Nabovinkler udgiore sammenlagte to rette og alle de Vinkler, der kan ligge om et Punkt fire rette Vinkler.

Modsæt. Naar to Vinkler $ACD$ og $DCB$ (Fig. 1) der have en fælles Spidse og en fælles Side udgiore tilsammentagne to rette, ere de Nabovinkler.

Beviis: Var $CB$ ikke den forlængede Linie $AC$ saa maatte $AC$ forlænget fra $C$ falde enten oven for $CB$ som $CK$ og da vilde $ACD + DCK$ være $= 2R$ som er imod Betingelsen; eller neden for som $CI$, da altsaa $ACD + DCI$ blev $= 2R$ der ligeledes er efter Betingelsen umuligt; $CB$ er altsaa den forlængede $AC$ og følgelig ere Vinklerne $ACD$ og $DCB$ Nabovinkler.

## §. 17.

Læresf. Top Vinkler $ACD$ og $ECB$ (Fig. 8.) (anguli verticales) ɔ: de med Toppunktet mod hinanden vendte Vinkler, der opkomme naar to rette Linier skiære hinanden; ere altid ligestore.

Bev. Vinklerne $DCA + ACE$ ere $= 2R$ (§. 16)
$$ACE + ECB = 2R$$

altsaa $DCA + ACE = ACE + ECB$ (Arith. §. 38. 6)
fradrag $ACE = ACE$

følgelig $DCA = ECB$ (Arith. §. 38. 4)

Modsæt. Er Vinklen $ACD = ECB$ (Fig. 11.) saa er Linien $ED$ en ret Linie og Vinklerne $ACD$ og $ECD$ Topvinkler.

Beviis: Var $ED$ ikke en ret Linie, maatte Linien $EC$ kanne forlænges fra $C$ og vilde da falde paa en af Siderne af $CD$ og være enten $CK$ eller $CI$; da saaledes enten Vinklen $ACK$ eller $ACI$ hvoraf den første er større den sidste mindre end $ACD$ maatte blive $= ECB$ imod den anførte Betingelse.

§. 18.

Læresæt. Naar i en Triangel $ADB$ (Fig. 30.) den ene Side $AB$, forlænges mod $C$, skal den udvendige Vinkel $DBC$ være større end den indvendige $D$, der ligger over for den forlængede Side.

Beviis: Fra Vinkelspidsen $A$ til Midten af $DB$ trækkes en ret Linie $AE$, der forlænges, saa at $EF$ bliver $= AE$ og fra $F$ til $B$ drages Linien $BF$. Nu er $EB = ED$ og $EF = EA$ (ved Tegning) Vinklen $DEA = FEB$ (§. 17.) følgelig Trianglen $AED = EBF$ og Vinklen $EBF = ADB$. Men nu er Vinklen $DBC > EBF$ (Arith. §. 38) altsaa $> ADB$.

Till. 1. Forlænges $DB$ mod $H$ bevises paa samme Maade, at Vinklen $ABH$ er større end $DAB$ og da Vinklen $ABH$ er $= DBC$ (§. 17.)

(§. 17.) saa følger at enhver udvendig Vinkel paa en forlænget Side i en Triangel er større end enhver af de to indvendige modsatte.

Till. 2. Vinklen $DBC$ er større end enhver af Vinklerne $BDA$ og $DAB$ men $DBC + DBA = 2R$ altsaa $DBA + DAB < 2R$ og ligeledes $DBA + ADB < 2R$ ↄ: I enhver Triangel ere ethvert Par Vinkler tilsammentagne mindre end to Rette.

Till. 3. I en Triangel kan ikke være mere end een ret eller stump Vinkel; og derfor kaldes en Triangel retvinklet, naar den har een ret Vinkel og to spidse som $ABC$ (Fig. 32.); stumpvinklet, naa den har een stump og to spidse Vinkler som $DEC$ (Fig. 33.) og spidsvinklet, naar alle tre Vinkler ere spidse.

Till. 4. Fra et Punkt $N$ (Fig. 28.) lader sig ikke trække flere end een lodret Linie $MN$ paa en given ret Linie som $LO$. Thi er $NM$ lodret ere Vinklerne $NMO$ og $NML$ rette (§. 7.) antages nu nogen anden Linie fra $N$ at være ligeledes lodret f. Ex. $NO$ eller $NL$ saa skulde Vinklerne $NLM$ eller $NOM$ ogsaa være rette som er umuligt efter Till. 3.

§. 19.

Opgave. At dele en given Winkel i to lige Dele.

Opløs. Winklen være $ABC$ (Fig. 37.) med en vilkaarlig Radius $AB$ beskrives fra Winkelspidsen $A$ Buen $BC$. Over Chorden til denne Bue beskrives en ligebenet Triangel, hvis Toppunkt bestemmes ved Skiæringspunktet af to med samme Radier (der dog maa tilsammentagne være større end $BC$ (§. 11.)) fra $B$ og $C$ beskrevne Cirkelbuer. En ret Linie fra Winkelspidsen $A$ til det saaledes bestemte Punkt $D$ vil da dele den givne Winkel.

Beviis: Efter Construktionen er $AB = AC$, $BD = CD$ og $AD = AD$ altsaa (§. 14) Trianglen $ABD = ACD$ og Winklen $BAD = DAC$.

Anm. Ved igien at halvere enhver af de fundne Dele kan en Winkel deles i fire, otte, sexten o. s. v. lige store Dele. Men at dele en Winkel i tre lige Dele er en Opgave som i den lavere eller elementare Geometrie ikke almindeligt kan opløses.

§. 20.

Opgave: At dele en given Linie i to lige Dele; saa at Delingslinien bliver lodret.

Opløs. Linien være $AB$ (Fig. 38.) over den beskrives til begge Sider de ligebenede Triangler (§. 19.)

(§. 19.) $ADB$ og $AEB$, igiennem deres Toppunkter trækkes Linien $DE$, som staaer lodret paa midten af $AB$.

Beviis: Efter Construktionen er $AD = DB$; $AE = EB$; og $ED = ED$; følgelig Trianglen $EAD = EBD$ (§. 14.) og Vinklen $ADC = CDB$ og altsaa Linien $CD$ lodret paa Midten af $AB$ (§. 13.).

§. 21.

Opgave. Fra et givet Punkt $M$ i en ret Linie (Fig. 28.) at opreise en lodret Linie.

Opløs. Fra det givne Punkt $M$ affættes paa Linien ligestore Stykker nemlig $ML = MO$; over Linien $LO$ beskrives en ligebenet Triangel; da en Linie fra dens Toppunkt $N$ til det givne Punkt $M$ vil være den forlangte lodrette Linie.

Beviis: Efter Construktionen er Linien $ML = MO$; $LN = NO$; $NM = NM$ altsaa Trianglen $LMN = MNO$ og Vinklen $LMN = NMO = R$ (§. 7.) og følgelig Linien $NM$ lodret paa $LO$.

Till. Fra et givet Punkt $C$ uden for en given Linie $AB$ (Fig. 39.) feldes en lodret Linie $CD$ paa den givne Linie saaledes: Fra Punktet $C$ beskrives med en vilkaarlig Radius $AC$ en Cirkelbue, som skiærer den givne Linie i $A$ og $B$

over

over $AB$ beskrives til den anden Side en ligebenet Triangel som (§. 20.) og fra dens Vinkelspids til det givne Punkt trækkes Linien $CE$ som er den forlangte lodrette. Beviset er det samme som §. 20.

§. 22.

Læresæt. Naar i en Triangel den ene Side er større end den anden; saa er altid den Vinkel lige over for den større Side, større end den over for den mindre.

F. Ex. i Trianglen $ACB$ (Fig. 31.) være $AB > CB$ saa er Vinklen $C > A$.

Beviis: Paa $AB$ afsættes $DB = CB$, og Punkterne $C$ og $D$ sammenbindes, i Triangelen $DCB$ er Vinklen $BCD = CDB$ (§. 13. Till. 1.). Men i Trianglen $ADC$ er $DB$ en forlænget Side og altsaa Vinklen $CDB > A$ nu er $CDB = BCD$ derfor $BCD > A$, og $BCA > BCD$. altsaa $BCA > A$.

Modsæt. Naar Vinklen $C$ er større end $A$, maa Siden $AB$ være større end $CB$.

Bev. Var $AB = CB$, saa var Vinklen $C = A$ mod Betingelsen; var $AB < CB$ saa var efter Sætningen Vinklen $A > B$ som ligeledes er mod den anførte Betingelse. Kan saaledes

ledes $AB$ hverken være $= CB$ eller $< CB$ saa maa den nødvendig være større.

Till. 1. I en retvinklet Triangel staaer derfor altid den største Side lige over for den rette Vinkel som $BC$ (Fig. 32.) og kaldes Hypothenuse, de to andre Sider kaldes Catheter.

Till. 2. Den lodrette Linie er den korteste af alle de rette Linier, der kan trækkes fra et Punkt ned paa en ret Linie, da enhver anden ret Linie vil blive Hypothenuse i en retvinklet Triangel.

Till. 3. I en ligebenet Triangel $ABC$ (Fig. 34.) er enhver ret Linie fra Punktet $B$ ned paa Grundlinien, som falder inden for Benene $AB$ og $BC$ kortere end disse lige lange Been; derimod er enhver Linie som fra samme Punkt paa Grundlinien falder uden for Benene længere end disse.

§. 23.

Læresæt. To Triangler ere ligestore naar der er een Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side ligestore i dem begge, og den modstaaende Side tillige er større end den hosliggende.

Bev. Trianglerne være $ABC$ og $DEF$ (Fig 35-36.) Vinklen $B = E$; Siden $AB =$ $DE$,

$DE$, $AC = DF$ og $AC > AB$; lægges nu Vinklen $E$ paa $B$, vil Siden $ED$ falde paa $AB$, og da $BA = DE$, Punktet $D$ paa $A$; ligeledes vil $EF$ falde paa $BC$; men nu er Spørgsmaalet om Punktet $F$ vil falde paa $C$, dette indsees ved at vise Umuligheden af det modsatte; thi faldt $F$ oven for $C$ f. Ex. i $D$ og en Linie blev trukket fra $A$ til $D$ maatte Triangelen $ADC$ være ligebenet da $AD$ blev saaledes $= DF = AC$ (per hypoth.) og altsaa (§. 22. Till. 3.) $AB > AC$ som er imod Betingelsen. Faldt $F$ neden for $C$ f. Ex. i $E$ blev Trianglen $ACE$ ligebenet, da $AE$ blev $= DF = AC$ (per hypoth.) og følgelig skulde $AB$ være $> AC$ som er imod Betingelsen. Kan nu Punktet $F$ hverken falde oven eller neden for $C$ maa det falde sammen med $C$ og altsaa Linien $EF = BC$. og Trianglerne congruente.

## Om parallele Linier og de deraf dannede Figurer.

§. 24.

Forkl. Ligeløbende eller parallele Linier ere rette Linier i en Plan, som ihvorlangt de end forlænges aldrig kan løbe sammen f. E. $AB$, $DE$ (Fig. 6.). Sammenløbende (convergerende)

de) faldes rette Linier som tilstrækkelig forlængede skiære hinanden i et Punkt og giøre en Vinkel som $AB$, $DE$ (Fig. 7.).

§. 25.

Læresæt. To rette Linier $AB$ og $CD$ (Fig. 40.) ere parallele; naar ved at overskiæres med en tredie $EF$, enten 1) de to indvendige Vinkler $o + p$ tilsammentagne ere $= 2 R$, eller 2) den udvendige og indvendige modsatte Vinkel $m$ og $p$ ere ligestore eller 3) Vexelvinklerne $n$ og $p$ (anguli alterni) ere ligestore.

Beviis: Naar Linierne $AB$ og $CD$ løb sammen med $B$ og $D$ blev der en Triangel hvor de to indvendige Vinkler $p + o$ var $= 2 R$ og hvor den udvendige Vinkel $m$ var $=$ den indvendige modsatte $p$. hvilke begge Tilfælde er umulige (§. 18. Till. 1 og 2.) Ligesaalidet kan de løbe sammen mod den anden Ende thi naar $o + p$ er $= 2 R$. saa er og de to indvendige paa den anden Side $= 2 R$ (§. 16.) og følgelig vil samme Umulighed i at tænke en Triangel der finde Sted. Ere Vexelvinklerne $p$ og $n$ ligestore, saa ere og de to indvendige $p + o = 2 R$. Thi efter §. 16. ere $n + o = 2 R$ og naar $n$ er $= p$ ere ogsaa $p + o = 2 R$ altsaa vil den samme Umulighed af at Linierne kunde løbe sammen igien finde Sted.

Anm.

Anm. De tre anførte Tilfælde med Vinklerne som bestemme Liniernes parallele Beliggenhed ere saaledes forbundne, at et af dem antaget har de andre til Følge, f. Ex. ere de indvendige $= 2R$ saa er ogsaa den udvendige og indvendige modsatte, samt Vexelvinklerne ligestore; thi

1) $o + p = 2R$ (efter Betingelsen)
$o + m = 2R$ (§. 16.)

$$o + p = o + m$$
$$o = o$$
$$p = m.$$

2) $o + p = 2R$
$o + n = 2R$ (§. 16.)

$$o + p = o + n$$
$$o = o$$
$$p = n.$$

§. 26.

Opgave: Igiennem et givet Punkt at trække en Linie parallel med en given Linie $CD$.

Opløs. Igiennem det givne Punkt og et vilkaarligt Punkt i den givne Linie trækkes en Linie $FE$; (Fig. 41.) og Vinkelen $m$ afsættes $= n$; naar da Linien $AB$ trækkes er den parallel med $CD$ (§. 25.).

Anm.

Anm. Mekanisk (d. e. ved at bruge andre Instrumenter end Linial og Passer) kan en Linie trækkes igiennem et givet Punkt parallel med en anden saaledes: man lægger en Linial *AB* (Fig. 42.) igiennem det givne Punkt og et Punkt i den givne Linie, og ved den lægges en Triangel saaledes at dens eene Side falder langs med Linien *HI* og den anden tæt og til Linialen; derpaa føres Trianglen langs med Linialen i samme Beliggenhed til det givne Punkt; da Linien *EG* derefter optrækkes som er parallel med *HI* (§. 25.). Ved Parallellinialen trækkes ogsaa en Linie parallel med en anden.

§. 27.

Grundsæt. Naar to rette Linier *AB* og *DE* (Fig. 43.) skiæres af en tredie *GH* saaledes at de to indvendige Vinkler *BIK* og *EKI* ere tilsammentagne $< 2R$ maa Linierne løbe sammen.

Anmerk. Denne er den saa meget omtvistede 11te Grundsætning hos Euclid. Man har villdet nægte dens Antagelse for Grundsætning og forsøgt paa mange forskiellige Maader at bevise den; et Beviis findes derfor hos Carstens; men som grundes paa en foregaaende Sætning hvorved alle tre Vinkler i en Triangel bevises at være liig $2R$, der forekommer mig ikke tilfredstillende. Ligesaalidet synes det for samme af Johan Schulz i Königsberg fremsatte Beviis passende her at anføre; hellere har jeg derfor villdet anføre den som Grundsætning.

Tilf. Linierne $AB$ og $DE$ ere ogsaa convergerende naar enten den udvendige og indvendige modsatte Vinkel eller Vexelvinklerne ere uligestore; thi er f. Ex. Vinklen $GIB >$ Vinklen $IKE$ saa ere, da $GIB + BIK = 2R$ (§. 16.) ogsaa $BIK + IKE < 2R$ og altsaa Linierne convergerende (§. 27.). Ligeledes naar $AIK > IKE$ saa er, da $AIK = GIB$ (§. 17.) ogsaa $GIB > IKG$ og følgelig Linierne convergerende.

§. 28.

Læresæt. Overskiæres to parallele Linier $AB$ og $CD$ (Fig. 40.) med en tredie $EF$ da ere 1) begge de indvendige Vinkler paa samme Side af den skiærende Linie $o + p = 2R$. 2) Den udvendige Vinkel $m =$ den indvendige modsatte $p$. 3) Vexelvinklerne $n$ og $p$ ligestore.

Beviis: 1) Vare Vinklerne $o + p < 2R$ vilde Linierne løbe sammen med $B$ og $D$ (§. 27.) som er mod Betingelsen da de antages parallele; vare derimod $o + p > 2R$ maatte Linierne løbe sammen mod den anden Ende som ligeledes er mod Betingelsen; kan saaledes $o + p$ hverken være $< 2R$ eller $> 2R$ saa følger at de maa være $= 2R$.

2)

2) Ere $o + p = 2 R$ saa da $o + m$ ere $= 2 R$ (§. 16.) saa følger at $o + p = o + m$ og følgelig $p = m$.

3) Er $p = m$ og $m = n$ (§. 17.) saa er altsaa $p = n$.

Till. 1. Ere to rette Linier parallele med en tredie ere de ogsaa indbyrdes parallele. En ret Linie som skiærer den ene af to parallele Linier skiærer naar den forlænges ogsaa den anden.

Till. 2. Ligge to Vinkler $DEF$ og $GHI$ (Fig. 111.) saaledes i en Plan at Linien $ED$ er parallel med $GH$ og $EF$ med $HI$ saa ere Vinklerne ligestore; thi er $ED$ parallel med $HG$ saa er Vinklen $E = n$ (§. 28.) og da $HI$ er parallel med $EF$ er $n = m$ følgelig $E = m$.

§. 29.

Læresæt. Naar i en Triangel $ACB$ (Fig. 48.) den ene Side $AB$ forlænges mod $D$, da er den udvendige Vinkel paa den forlængede Side saa stor som de to indvendige modsatte ɔ: $CBD = BCA + CAB$.

Beviis: Igiennem Punktet $B$ trækkes Linien $BH$ parallel med $AC$ (§. 26.) saa er

$$\angle HBD = \angle CAB$$

og $\angle CBH = \angle BCA$ (§. 28.)

altsaa $\overline{HBD + CBH = CAB + BCA}$.

og $HBD + CBH = CBD = CAB + BCA$.

Till. 1. Alle tre Vinkler i enhver Triangel udgiøre tilsammentagne to rette Vinkler eller 180° thi $\angle CBD + CBA = 2R$ (§. 16.) men $CBD = CAB + BCA$ altsaa $CBA + CAB + BCA = 2R$.

Till. 2. Naar i en Triangel een Vinkel er bekiendt, er Summen af de to andre ogsaa bekiendt og ere de to Vinkler givne, er den tredie ligeledes. Naar altsaa i to forskiellige Triangler de to Vinkler ere stykkeviis ligestore, er den tredie ogsaa.

Till. 3. Er i en ligebenet Triangel een Vinkel bekiendt, ere de alle tre bekiendte. I en ligesidet Triangel er hver Vinkel $= \frac{2}{3} R = 60°$.

Till. 4. I en retvinklet Triangel udgiøre de 2 spidse Vinkler tilsammentagne een ret, og naar Catheterne ere ligestore ere hver af de spidse Vinkler $= \frac{1}{2} R = 45°$.

Till. 5. Summen af alle Vinklerne i enhver retlinet Figur findes ved at multiplicere Sidernes Antal med $2R$ og derfra subtrahere $4R$ ɔ: $S = (n \times 2R) - 4R$. Thi fra et Punkt i Figurens Flade kan trækkes Linier til alle dens Vinkelspidser (Fig. 32.) hvorved der opkomme ligesaa

ligesaa mange Triangler som Figuren har Sider; i hver Triangel udgiøre Vinklerne 2 $R$, altsaa findes Summen af Trianglernes Vinkler ved at multiplicere deres Antal med 2 $R$; men Vinklerne som ligge omkring det antagne Punkt udgiøre 4 $R$ (§. 16.) disse maa altsaa, da de ikke høre til den egentlige Figurs Vinkler, subtraheres fra Summen af Trianglernes Vinkler.

Anm. Vinkler kan være enten udgaaende eller indgaaende. For saavidt Benene forlængede mod den anden Side af Toppunktet enten gaa ud fra Figuren eller ind i Figurens Flade.

§. 30.

Læresæt. Overskiæres to parallele Linier $AB$, $DC$ (Fig. 44.) med to andre parallele Linier $AD$ og $BC$, da ere de imellem Parallelerne liggende Stykker ligestore: nemlig $AB = DC$, og $AD = BC$.

Beviis: Naar Linien $DB$ (som kaldes en Diagonallinie) trækkes, opkomme Trianglerne $ADB$ og $DBC$ hvor i er

$$DB = DB$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle ADB = \angle CBD \\ \angle ABD = \angle CDB \end{array}\right\} \text{(§. 28.)}$$

altsaa $\Delta\, ABD = \Delta\, DBC$ og følgelig $AB = DC$; og $AD = BC$.

Till.

Till. 1. En saadan firsidet Figur, hvori de modstaaende Sider ere parallele og ligestore kaldes et Parallelogram.

Anm. Et Parallelogram nævnes almindelig ved de to Bogstaver som staa ved de modstaaende Vinkelspidser f. Ex. *AD*; *FH* (Fig. 45 og 46.)

Till. 2. Qvadraten, Rectanglet, Rhombus og Rhomboides (§. 8.) ere Parallelogramer.

Till. 3. Ethvert Parallelogram deles ved en Diagonallinie i to ligestore Triangler, og ikke allene dets modstaaende Sider; men ogsaa de modstaaende Vinkler ere ligestore, og Summen af alle dets fire Vinkler udgiøre tilsammentagne 4 *R* (sammenlign §. 29. Till. 5.).

Till. 4. Parallele Linier staae allevegne ligelangt fra hinanden; thi alle perpendikulærerne imellem dem blive parallele (§. 25.) og ere altsaa ligestore (§. 30.).

Anm. Man kan paa Grund heraf geometrisk tegne en Linie parallel med en anden, ved at trække den giennem Endepunkterne af to paa den givne Linie opreiste ligestore Perpendikulærer.

Till. 5. Er i et Parallelogram een Vinkel = *R* ere de alle rette; er derimod een spids er den modstaaende ogsaa spids men de to andre stumpe, og omvendt.

§. 31.

Opgav. Af to givne Linier $DC$, $CB$ (Fig. 44.) og den Vinkel de indslutte $BCD$ at tegne et Parallelogram.

Opløs. Den ved de tre givne Stykker bestemte Triangel $DCB$ afsættes og nu giøres $\Delta$ $ADB \cong DCB$ saa er $\angle ABD = BDC$ og $ADB = DBC$ følgelig Linien $AB$ parallel med $DC$ og $AD$ med $BC$ (§. 25.) og den tegnede Figur et Parallelogram (§. 30. Till. 1.).

Till. Er den givne Vinkel ret, og de to Sider som indeslutte den ligestore, da frembringes en Qvadrat; er Vinklen skiæv men Siderne ligestore en Rhombus; er Vinklen ret, men Siderne ulige en Rectangel og er Vinklen skiæv og Siderne ulige en Rhomboides.

Anm. Til at tegne en Qvadrat behøves altsaa kun at gives en Side; til en Rhombus een Side og een Vinkel; en Rectangel 2 Sider, og en Rhomboides, to Sider og en Vinkel.

§. 32.

Læres. Naar i et Parallelogram $ABCD$ (Fig. 53.) trækkes en Diagonal $AC$ og igiennem et vilkaarligt Punkt $E$ paa Diagonalen trækkes Linier parallele med de modstaaende Sider nemlig $IK$ parallel med $AB$ og $DC$; og $HG$

parallel med $AD$ og $BC$; da blive de to Parallelogramer som Diagonalen ikke gaaer igiennem $ED$ og $EB$ (som kaldes Complementer til Parallelogramerne omkring Diagonalen) ligestore.

Beviis:

$$\triangle ADE = \triangle ABC \text{ (§. 30. Till. 3)}$$
$$\triangle AIE = \triangle AEH$$
$$\triangle EGC = \triangle EKC$$

altsaa $\triangle ADC - (AIE + EGC) = \triangle ABC - (AEH + EKC)$ ɔ: Parall. $ED$ = Parall. $EB$.

Till. Er Parallelogramet en Qvadrat $ABCD$ (Fig. 54.) hvis ene Side bestaaer af to Dele $AF$ og $FB$, da bestaaer Qvadratet paa hele Linien $AB$, af følgende Stykker 1) Qvadratet paa $AF$; 2) Qvadratet paa $FB$ eller $EC$ og 3) 2 ligestore Rectangler $FE$ og $HF$. Da nu en Side i en Qvadrat kan altid ansees som Roden, og Fladen eller Qvadratet selv som Qvadrattallet af denne Rod; saa kan heraf udledes et Beviis for den i Arithmetiken §. 55. anførte Sætning om Qvadrattallet af en binomisk Rod.

§. 33.

Forkl. Ved Høiden i et Parallelogram forstaaes den perpendikulære Linie imellem to mod-

staaende

staaende Sider hvoraf den eene da kaldes Grund-linien. I en Triangel er Høiden en Perpendikulær fra en af Vinkelspidserne ned paa den modstaaende Side, som da kaldes Grundlinie.

Till. 1. I Rectanglerne ere af to anliggende Sider altid den ene Høide og den anden Grundlinie; i Qvadratet er Grundlinie og Høide ligestore og altid en af Qvadratets Sider. I Rhomber og Rhomboider er derimod naar af to anliggende Sider den ene antages for Grundlinie, Høiden altid mindre end den anden (§. 22. Till. 1.)

Till. 2. En Triangel er halvparten af et Parallelogram, som har samme Grundlinie og Høide (§. 30. Till. 3.).

§. 34.

Læresæt. Parallelogramer, som have samme Grundlinie og Høide, ere ligestore.

Beviis: 1te Tilfælde. Parallelogramerne være $BF$ og $AE$ (Fig. 56.) saa er $AB = CF$; $AD = FE$ (§. 30. Till. 1.) $BC = AF = DE$ og $BC + CD = DE + CD$ ɔ: $BD = CE$ altsaa Triangelen $ABD = CFE$ og $ABD - CDH = CFE - CDH$ ɔ: Trapes. $BACH =$ Trapes. $DHFE$ følgelig $BACH + AHF = DHFE + AHF$ ɔ: Parallelog. $BF =$ Parallelog. $AE$.

2det Tilfælde: Parallelogrammerne være $BF$ og $AE$ (Fig. 55.) saa er $AB = DF$; $AC = FE$; $BD = AF = CE$; altsaa $BD - CD = CE - CD$ ɔ: $BC = DE$ og Trianglen $ABC$ = Trianglen $DFE$ følgelig $ABC + ACDF = DFE + ACDF$ ɔ: $FB = AE$.

3de Tilfælde: Parallelogrammerne være $BC$ og $AE$ (Tab. 2. Fig. 1.) saa er $AC = BD$; $AD = BE$; $CD = AB = DE$ altsaa Trianglen $ACD = DBE$ og $ACD + ADB = DBE + ADB$ ɔ: Parallelog. $CB = AE$.

§. 35.

Læresæt. Triangler som have samme Grundlinie og Høide ere ligestore.

Beviis: Trianglerne være $ACB$ og $ADB$, (Fig. 3.) naar da $CF$ træffes parallel med $AB$; $BE$ med $AC$ og $BF$ med $AD$; saa er $ACB = \frac{1}{2}$ Parall. $ACEB$ og $ADB = \frac{1}{2}$ Parall. $ADFB$; men Parall. $ACEB$ = Parall. $ADFB$ (§. 34.) altsaa $\frac{1}{2}$ $ACEB = \frac{1}{2}$ $ADFB$ og $\triangle ACB = \triangle ADB$.

§. 36.

Opgav. 1) At forvandle en Triangel *ABC* (Fig. 2.) til et Parallelogram.

Opløs. Fra Midten af Grundlinien *AB* trækkes en Linie *FE* parallel med *AC* og igiennem *C* en Linie *CD* parallel med *AB* saa er Parall. *AE* = ½ Parall. *ACDB* = Δ *ACB*.

2) At forvandle en Δ *KIF* (Fig. 4.) til et Parallelogram hvori der er en given Side *G* og en given Vinkel.

Opløsning: Paa Midten af Grundlinien *AF* afsættes den givne Vinkel ved *H* og Parall. *HLEF* frembringes paa den nylig forklarede Maade. Fra *F* afsættes nu Linien *FC* = den givne Linie *G*, *IE* forlænges og igiennem *C* trækkes *CD* parallel med *FE*; Linierne *LH*, *EF* og *DC* forlænges derpaa ubestemt; fra *D* til *F* trækkes en Diagonal, som forlænges til den skiærer den forlængede *LH* i *A*; derpaa trækkes *AB* parallel med *HC*. Nu er Parall. *FB* = *FL* (§. 32.) og *FL* = Δ *KIF*, følgelig *FB* = *KIF* men i *FB* er *FC* = *G* (den givne Side) og Vinklen *FGB* = *HAB* (§. 28.) = *LHF* (den givne Vinkel).

Anm. Er den givne Vinkel = *R*. bliver Triangelen forvandlet til en Rectangel.

Till.

Till. Enhver retlinet Figur forvandles til en Rectangel, naar den inddeles ved Diagonaler i Triangler; og hver Triangel for sig forvandles til en Rectangel med en given Side, da disse Rectangler igien samles til een eneste.

§. 37.

Læresæt. I enhver retvinklet Triangel $ACB$ (Fig. 5.) er Qvadratet paa Hypothenusen $AB$ saa stor som Qvadraterne paa begge Catheterne $AC$ og $CB$ tilsammentagne.

Beviis: Paa Trianglens Sider beskrives Qvadraterne $AF$, $BG$ og $AH$; fra den rette Winkels Spidse $C$ fældes en lodret Linie $GL$ paa Hypothenusen igiennem dens Qvadrat; som derved deles i to Rectangler $BL$ og $LA$. Nu bevises at Rectanglen $BL$ er $=$ Qvadraten $BG$. Fra $G$ til $E$ og fra $A$ til $F$ trækkes til den Ende Hielpelinier; saa er Triangelen $ABF = \frac{1}{2}$ Qvadr. $GB$ og Trianglen $BCE = \frac{1}{2}$ Rectangel $BL$ (§. 30. Till. 3.).

men $AB = BE$

$BF = BG$

$\angle ABF = \angle CBE$ { thi $ABF = ABC + R$ og $CBE = ABC + R$

$\Delta ABF = \Delta CBE$

$\frac{1}{2}$ Qvadr. $BG = \frac{1}{2}$ Rect. $BL$ altsaa Qvadratet $BG =$ Rect. $BL$.

Paa

Paa samme Maade; ved at trække Hielpelinierne $DC$ og $IB$, bevises at Rectanglen $AL$ = Qvadratet $AH$.

Nu er Rect. $BL$ = Qvadr. $BG$

Rect. $AL$ = Qvadr. $AH$

altsaa Qvadr. $BD$ (Rect. $BL$ + Rect. $AL$) = Qvadr. $BG + AH$.

Anm. Denne Læresætning, som efter dens formeente første Opfinder kaldes den Pythagoriske, er for dens mangfoldige Anvendelse i Mathematiken, af overmaade stor Vigtighed. Pythagoras siges derfor ogsaa af Glæde over denne Opfindelse at have ofret et Hecatombe. Qvadratet paa en Linie $BC$ betegnes ved Exponenten 2 eller ved Bogstavet $q$, saa at $BCq$ v. $BC^2$ er = Qvadrat $BCGF$.

Till. Er Qvadratet paa Hypothenusen saa stort som Qvadraterne paa begge Catheterne; saa maa Qvadratet paa den ene Cathete være saa stort som Differencen mellem Qvadratet paa Hypothenusen og Qvadratet paa den anden.

## §. 38.

Opgave: 1) At tegne en Qvadrat saa stort som to givne, eller at addere to Qvadrater.

Opløs. De givne Qvadrater være $ABq$ og $GHq$ (Fig. 7.) man tegner da en retvinklet Triangel $AEB$ hvor $AB = AB$, $AE = GH$ saa

saa er $EBq = ABq + AEq = ABq + GHq$ (§. 37.).

2) At tegne en Qvadrat saa stor som Differencen mellem to givne Qvadrater; eller at subtrahere en mindre Qvadrat fra en større.

Opløs. De givne Qvadrater være $ABq$ og $GHq$ (Fig. 7.) man tegner en retvinklet Triangel $FDE$ (Fig. 9.) saaledes at $DF = GH$; $FE = AB$; saa er $DEq = FEq - FDq = ABq - GHq$ (§. 37. Till.)

3) At tegne en Qvadrat dobbelt saa stor som en given.

Opløs. Qvadraten være $ABq$ man trækker i den en Diagonal $CB$, saa er $CBq = ACq + ABq = 2\,ABq$.

4) Af de to Sider (givne i Tal) i en retvinklet Triangel $ACB$ (Fig. 8.) ved Beregning at finde den tredie.

Opløs. Ere Catheterne givne, da tages Qvadrattallene deraf og adderes, og af Summen udtrækkes Roden som er Hypothenusen; thi $CB^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 37.) og altsaa $\sqrt{CB^2} = \sqrt{(AC^2 + AB)^2}$; altsaa $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)}$. Er Hypothenusen $CB$ og en af Catheterne $AB$ givne, da findes den anden $AC$ naar fra Qvadratet paa Hypothenusen subtraheres Qvadratet paa den ene Cathete og af Diffe-

Differencen udtrækkes Roden; thi $AC^2 = CB^2 - AB^2$ (§. 37. Till.) og $\sqrt{AC^2} = AC = \sqrt{(CB^2 - AB^2)}$. f. Ex. $CB = 5$; $AB = 3$; saa er $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

## §. 39.

Lærес. Er i en Triangel $ABC$ (Fig. 6.) Qvadratet paa den ene Side $CBq = ACq + ABq$ saa er Trianglen retvinklet og Vinklen over for $CB$ er $= R$.

Bev. Ved $A$ afsættes Vinkelen $BAD = R$; $AD = AC$ og Punkterne $B$ og $D$ bindes sammen; Triangelen $BAD$ er da retvinklet og $BDq = BAq + ADq$ (§. 37.)
men $CBq = BAq + ACq$ (efter Beting.)
nu er $BAq = BAq$
$ACq = ADq$ fordi $AC = AD$ (ved Construct.)
altsaa $BAq + ACq = BAq + ADq$
følgelig $DBq = CBq$ og $BD = CB$ er nu $AB = AB$; $AD = AD$ og $BD = CB$ saa er Trianglen $BAD = CAB$ og følgelig $\angle CAB = BAD = R$.

# Om Linier og Vinkler i og ved Cirklen.

§. 40

Læresæt. En Linie som deler Vinklen ved Centrum *ACB* (Fig. 29. Tab. 1.) i en Cirkel i to lige Dele, deler ogsaa Chorden *AB* som ligger imellem Vinklens Been i to lige Dele og staaer lodret derpaa.

Beviis: Trianglen *ACB* er ligebenet, og altsaa naar Linien *CD* deler Vinklen *ACB* i lige Dele staaer den tillige lodret midt paa *AB* (§. 13.).

Till. 1. Staaer Linien *DC* lodret paa Midten af Chorden maa den nødvendig gaa igiennem Centrum og dele Vinkel ved Centrum i to lige Dele, thi der maatte ellers gives en anden Linie fra Centro som delte Vinklen *ACB* i to lige Dele, og som i Følge Læresætningen maatte staa perpendiculær paa Midten af Chorden. Der vilde saaledes gives to forskiellige lodrette Linier paa et og samme Punkt i samme rette Linie som er umuligt. (§. 13. og §. 7.)

Till. 2. Fældes en Linie fra Centrum lodret paa Chorden maa den staa midt paa Chorden thi i Trianglerne *ACD* og *CDB* vil $CD = CD$, $\angle CDA = \angle CDB = R$ og $\angle$

*CAD*

$CAD = \angle CBD$ (§. 13. Till. 1.) altsaa $\triangle ADC = DCB$ og $AD = DB$.

§. 41.

Opgav. At søge Centrum til en Cirkel, hvis Peripherie skal gaa igiennem tre givne Punkter.

Opløs. Punkterne være $A$, $B$, $C$, (Fig. 10.) de forbindes med rette Linier $AB$ og $BC$; paa Midten af disse opreises lodrette Linier, som da begge maa gaa igiennem Centrum til den søgte Cirkel (§. 40. Till.) og hvor disse Linier skiære hinanden, maa altsaa Centrum være. At disse lodrette Linier maa skiære hinanden naar Punkterne ligge saaledes (Fig. 10.) at Linierne $AB$ og $BC$ giøre en ret Vinkel med hinanden indsees af §. 28. Till. 1.

Ligge derimod de givne tre Punkter saaledes, at Linierne imellem dem som (Fig. 11.) $AB$ og $BC$ giøre en stump Vinkel med hinanden, da maa de paa Midten af $AB$ og $BC$ opreiste lodrette Linier ogsaa skiære hinanden, thi i Triangelen $BEF$ er Vinklen $BFE = R$ (ved Construct.) altsaa $BEF$ spids (§. 18. Till. 1.) følgelig $\angle DGE + GEF < 2R$ og alt saa Linierne $CD$ og $ED$ convergerende (§. 27.).

Giør

Giøre Linierne mellem de tre Punkter en spids Vinkel med hinanden maa de paa Midten af dem opreiste lodrette Linier ogsaa skiære hinanden.

Anm. Ligge de tre givne Punkter i en ret Linie lader der sig ingen Cirkel slaa derigiennem, thi de paa Midten af Forbindingslinierne opreiste Perpendiculærer vil da blive parallele og følgelig ikke skiære hinanden (§. 24 og 25.).

§. 42.

Læres. Staa i en og samme eller i ligestore Cirkler 1) to Chorder lige langt borte fra Centrum, da ere de ligestore; 2) ere Chorderne derimod ligestore, saa staa de lige langt borte fra Centrum; og 3) er den ene Chorde større end den anden, da staaer den større nærmere ved og den mindre længere borte fra Centrum.

Beviis: 1) Er (Fig. 12.) Chorderne $AB$ og $DE$ lige langt borte fra Centrum ɔ: $CF = CG$, saa er, naar Linierne $CB$ og $CD$ trækkes, i Trianglerne $CFB$ og $CDG$

$$CBq = CFq + FBq$$
$$CDq = CGq + DGq \quad (§. 37.)$$

men $CB = CD$ og altsaa $CBq = CDq$

følgelig $CFq + FBq = CGq + DGq$

er

er nu $\quad CFq = CGq$ (efter Beting.)

saa er $FBq = DGq$ og $FB = DG$ (Arith. §. 38.)
$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DE$ og $AB = DE$.

2) Er (Fig. 12.) $AB = DE$ saa er $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DE$ og $FB = DG$ og $FBq = DGq$ er nu

$$FBq + FCq = CGq + DGq$$
og $\quad FBq = DGq$ (efter Beting.)

saa er $\quad FCq = CGq$ og $FC = CG$.

3) Er (Fig. 13.) $AB > EG$ saa er $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} EG$; $DB > EF$.

men $\quad CBq = CDq + DBq$ (§. 37.)
$$CEq = CFq + EFq$$
$CBq = CEq$ altsaa $CDq + DBq = CFq + EFq$
$$DBq > EFq$$
$CDq < CFq$ (Arith. §. 38.)
og $\quad CD < CF$.

§. 43.

Forkl. En Vinkel som staaer med sit Toppunkt i Cirklens Peripherie og hvis Sider ere Chorder kaldes en Peripherie-Vinkel som $ADB$ (Fig. 15.) og den siges at staa i Segmentet $ADB$ af Cirklen og paa Buen $AB$. Center-Vinkel kaldes derimod (§. 10.) en Vinkel, der staaer med sit Toppunkt i Centro og hvis Sider ere Radier $ACB$ (Fig. 25.).

§. 46.

Læresæt. En Linie *KI* (Fig. 14.) som staaer lodret paa Enden af Radius *HI*. Kan ikke have flere Punkter tilfælles med Cirklen end det, hvori den berører Radius, men ligger ellers aldeles uden for Cirklen.

Bev. Alle de rette Linier *HL*, *HM*, ꝛc. som kan trækkes fra Centrum til Linien *KI* maa alle blive længere end *HI* (§. 22. Till. 1.) og altsaa maa de Punkter, hvortil de trækkes alle ligge uden for Cirkelfladen (§. 9.) følgelig ligger hele Linien *KI* uden for Cirklen.

Till. 1. En saadan Linie som staaer lodret paa Enden af en Radius er altsaa en Tangent; og til ethvert givet Punkt i en Cirkel trækkes altsaa en Tangent ved at opreise (§. 45.) en lodret Linie paa Enden af Radius.

Till. 2. Fra et givet Punkt *A* (Fig. 21.) uden for en Cirkel trækkes en Tangent til Cirklen naar det givne Punkt bindes sammen med Cirklens Centrum *C*, Linien *CA* halveres og fra Middelpunktet beskrives en Cirkel som skiærer den givne Cirkel i *D*, Linien *AD* bliver da den forlangte Tangent, thi Vinklen *ADC* er $=$ *R* (§. 44. Till. 3.) og altsaa *AD* en Tangent.

§. 47.

§. 47.

Lærес. Støde to Skiæringslinier som *AB* og *BC* (Fig. 23.) sammen i et Punkt uden for Cirklen, da er Vinklen $ABC = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE$ ɔ: den har til Maal det halve af den concave Bue mindre end det halve af den convexe.

Bev. Naar Hielpelinien *AD* trækkes, er Vinklen $ADC = ABC + BAD$ (§. 29.)

$$\frac{BAD = BAD}{}$$

altsaa $ADC - BAD = ABC$ og følgelig

$\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE = ABC$ (§. 44. Till. 1)

Till. 1. En Vinkel som en Tangent og en Sekant giøre ved at støde sammen uden for Cirklen udmaales paa samme Maade.

Till. 2. Ligger derimod en Vinkel med sit Toppunkt i Fladen af en Cirkel uden at ligge i Centro, da har den til Maal det halve af begge de Buer, som dens Sider, forlængede mod begge Sider af Toppunktet til Peripherien, afskiære.

§. 48.

Læresæt. Den Vinkel *ABH* (Fig. 22.) som en Chorde og en Tangent til samme Cirkel giøre med hinanden, har til Maal den halve Bue *AB* som Chorden afskiærer.

Beviis: Fra Berøringspunktet $B$ trækkes en Diameter $BCE$ og Punkterne $D$, $A$ forbindes ved Linien $DA$, i Trianglen $DAB$ er Vinklen $A = R$ (§. 44. Till. 3.)

Vinklerne $ADB + DBA = R$ (§. 29. Till. 4.)
og $DBA + ABH = R$ (§. 46. Till. 1.)
altsaa $ADB + DBA = DBA + ABH$
men $DBA = DBA$
følgelig $ADB = ABH$
det halve af Buen $AB = ABH$ (§44 Till.1)

§. 49.

Læresæt. Ere i samme eller i lige store Cirkler to Chorder som $AB$ og $DE$ (Fig. IV.) ligestore, da ere Buerne $AGB$ og $DEH$ som de afskiære ogsaa ligestore, og omvendt.

Beviis: Chorden $AB$ være $= DE$, Radierne $AC$, $CB$, $CD$ og $CE$ trækkes saa er Trianglen $ACB = CDE$ (§. 14.) og altsaa Vinklen $ACB = DCE$ og Buen $AGB =$ Buen $DHE$.

Till. 1. En lodret Linie $CI$ fra Centro paa Chorden $DE$, der deler Chorden i to lige Dele (§. 40) deler tillige Buen $DAE$ i to lige store Buer: thi Trianglen $DIH$ er $= EIH$ (§. 14.) altsaa Chorden $DH = HE$ og følgelig

efter

efter den nylig anførte Sætning Buen $DH =$ Buen $HE$.

Till. 2. En Chorde ($AB$ Fig. 24) som afskiærer en Bue paa 60 Grader er altid saa stor som Cirklens Radius, thi er Buen $AB = 60°$ saa er Vinklen $ACB = 60°$ (§. 10. Till. 2.) og altsaa Vinklerne $CAB + CBA = 120°$ (§. 29. Till.) men $AC = CB$ og altsaa $CAB = CBA = 60°$ (§. 13. Till. 1.) alle tre Vinklerne blive altsaa ligestore og følgelig Trianglen ligebenet, hvordan den end vendes og $AB = AC = CB$.

§. 50.

Læresæt. Naar til en og samme Cirkel trækkes to Tangenter $BD$, $AD$ (Fig. 27.) der skiære hinanden i Punktet $D$; saa ere Stykkerne fra Berøringspunkterne til Skæringspunktet ligestore ɔ: $BD = AD$.

Beviis: Naar Linierne $CD$, $CB$ og $CA$ trækkes, ere

$BC = CA$ (Radier i Cirklen)
$CD = CD$
$\angle DBC = \angle DAC = R$ (§. 46. Till.)

altsaa Trianglen $DBC =$ Trianglen $DAC$ (§. 23.) og Linien $BD = AD$.

Till. Vinklerne $BCA$ og $BDA$ samt Buen $BEA$ deles ved Linien $CD$ i to lige Dele.

## Om regulære Figurer i sær Polygoner, og deres Forhold til Cirklen.

§. 51.

Forkl. En Figur siges at være indskreven i en Cirkel naar Cirklens Peripherie gaaer igiennem alle Figurens Hiørner, og dens Sider ere Chorder og Cirklen kaldes da omskreven som *AFEDB* (Fig. 24.). Ere derimod Figurens Sider Tangenter til Cirklen, kaldes den omskreven og Cirklen indskreven som *GHIKL* (Fig. 28.).

Till. Cirklens Peripherie er altid større end Peripherien (Perimeteren Omtrækket) af den indskrevne og mindre end Peripherien af den omskrevne Polygon.

§. 52.

Læresæt. Antages Peripherien af en Cirkel at være deelt i et vist Antal af lige store Dele som *AF*, *FE*, *ED*, *DB* og *BA* (Fig. 24.) og der trækkes Chorder mellem alle Delingspunkter fremkommer en indskreven regulær Figur.

Beviis: Vare Buerne ligestore, saa ere Chorderne ogsaa ligestore (§. 49.) som ere Figurens Sider, Vinklerne *AFE*, *FED* 2c. blive

alle

alle Peripherie-Vinkler der staae i ligestore Segmenter og ere altsaa ligestore (§. 44. Till. 2.), men ere baade Sider og Vinkler ligestore, er Figuren regulær (§. 8.).

Till. I en given Cirkel indskrives altsaa enhver regulær Figur, ved at dele Cirklens Peripherie i saa mange ligestore Dele som Figuren skal have Sider.

Anm. Denne Deling skeer enten geometrisk eller mekanisk.

§. 53.

Opgave: At dele en Cirkels Omkreds i fire og i sex ligestore Dele, og tegne en regulær firkant eller sexkant i Cirklen.

Opløs. 1) Man trækker to Diametre *AB* og *CD* (Fig. V.) lodrette paa hinanden, saa ere Vinklerne *AIC*, *CIB*, *BID* og *DIA* rette og altsaa ligestore, og Buerne *AC*, *CB*, *BD* og *DA* følgelig ogsaa ligestore (§. 10.) naar da Chorderne trækkes, har man den forlangte regulære Firkant.

2) Med Radius *AC* (Fig. 24.) afskjæres ligestore Stykker paa Peripherien som da inddeles i sex lige Buer (§. 49. Till. 2.) og naar Chorderne hertil trækkes fremkommer den regulære Sexkant.

Till.

Till. 1. Ved at halvere Buerne kan man naar Cirklens Peripherie først er deelt i fire eller sex Dele igien dele den i 8, 12, 16, 24 og flere Dele, og saaledes tegne regulære Polygoner (§. 57. Till.). Ligeledes kan, naar Peripherien er deelt i et lige Antal ligestore Dele, det halve Antal deraf bestemmes.

Anm. Foruden de her nævnte Dele lader en Cirkels Peripherie sig ogsaa dele geometrisk i ti, fem og femten lige store Dele, men denne Deling grunder sig paa Læresætninger som først i det følgende fremsættes. Derimod i 7, 13 rc. Dele lader Peripherien sig ikke dele uden efter Beregning og ved mekanisk Tegning.

Till. 2. Er saaledes en regulær Polygon f. Ex. en Sexkant (Fig. 29.) beskreven i en Cirkel, og der trækkes Linier fra Cirklens Centrum til Polygonens Vinkelspidser da opkomme saa mange lige store Triangler som Polygonen har Sider; disse lade sig igien forvandle til een eeneste Triangel (Fig. 33. og §. 35.)

§. 54.

Forkl. Ved Polygon-Vinkel forstaaes den Vinkel i en regulær Polygon som ethvert Par af Polygonens Sider giøre med hinanden f. Ex. Vinklen *EFA* og *EDB* (Fig. 24.) eller *FGA* og *ACD* (Fig. 29.). Polygonens Center-Vinkel kaldes den Vinkel, som to

Radier

Radier i den omskrevne Cirkel, trukne til begge Ender af samme Polygon-Side, giøre med hinanden som *AGB*, *BGD* ꝛc. (Fig. 29.)

Till. 1. Center-Vinklen i enhver i en Cirkel indskrevet Polygon beregnes derfor, ved at dividere 360° med Sidernes Antall; (§. 10. Till. 2.) Foldes nu Sidernes Antall $n$ er Center-Vinklen $= \frac{360^\circ}{n}$.

Till. 2. Polygonvinklen i enhver i en Cirkel indskreven Polygon udmaales som en Peripherie-Vinkel (§. 44. Till. 1.) ved den halve Bue hvorpaa den staaer; og da i enhver regulær Polygon alle Vinklerne staae paa ligestore Buer, nemlig paa den hele Cirkels Peripherie undtagen det der ligger bag ved enhver Vinkels to Sider; som er i en Femkant (Fig. 28.) $\frac{2}{5}$ i en Sexkant (Fig. 24.) $\frac{2}{6}$ af den hele Peripherie; saa følger at naar Sidernes Antal i en regulær Polygon kaldes $n$, er Buen hvorpaa enhver af dens Polygon-Vinkler staaer $= 360^\circ - \frac{2}{n} \times 360$ og Vinklen har til Maal det halve deraf som er $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$; men da efter forrige Tillæg Centervinklen i enhver regulær Polygon er $= \frac{360^\circ}{n}$ saa sees at Polygonvinklen fin-

des

des ved at subtrahere Centervinklen fra 180°. Efter disse Formler lade Center- og Polygonvinkler sig beregne i alle regulære Polygoner, naar Sidernes Antal er bekiendt.

§. 55.

Opgave: Om enhver regulær Figur at beskrive en Cirkel.

Opløs. Figuren være *ABDEFG* (Fig. 29.) naar da to af Polygonvinklerne f. Ex. ved *A* og *B* deles i 2 lige Dele, saa vil Delingslinierne støde sammen og bestemme Centrum *C*, hvorfra med Radius *CA* eller *CB* en Cirkel lader sig beskrive som vil gaa igiennem alle Figurens Hiørner og altsaa være en omskreven Cirkel (§. 51.).

Beviis: Trækkes Linier fra *C* til alle Polygonens Vinkelspidser *CG*, *CF* ꝛc. saa blive alle de derved opkomne Triangler ligestore (§. 15.) og altsaa Linierne *CA*, *CB*, *CD*, ꝛc. alle lige lange, følgelig ligge alle Punkterne *A*, *B*, *D*, *E*. *F*, *G* lige langt borte fra *C* og altsaa i Peripherien af en Cirkel, hvis Centrum er *C*.

Till. Fældes fra *C* lodrette Linier paa Polygon Siderne som *CH* (Fig. 29.) vil de alle blive lige lange (da enhver af Trianglerne derved deles i to lige store Triangler) og med en af dem

til

til Radius lader sig altsaa en Cirkel indskrive i Polygonen.

Anm. Centrum til disse Cirkler i og om Polygonen kaldes ogsaa Polygonens Centrum, og den omskrevne Cirkels Radius $AC$ Polygonens største og den indskrevne Cirkels Radius $CH$ dens mindste Radius.

§. 56.

**Opgave: Paa en given ret Linie at afsætte en regulær Polygon af et bestemt Antal Sider.**

Opløs. Linien være $AB$, Polygonsidernes Antal f. Ex. 5 (Fig. 28.) Polygon Vinklen beregnes (§. 54. Till. 2.) og ved Hielp af Transporteuren (mekanisk) afsættes den halve Polygon-Vinkel ved $A = CAB$ og den halve ved $B = CBA$ Linierne fra $A$ og $B$ forlænges til de skiære hinanden i $C$, fra $C$ beskrives en Cirkel med Radius $CA$, og Chorden $AB$ omføres i Cirklen som da vil blive inddelt i de forlangte fem Dele og Polygonen saaledes afsat.

Beviis: Vinklen $ACB$ maa blive $= 2R - (CAB + CBA)$ (§. 29. Till. 1.) ɔ: blive Opfyldningen til Polygon-Vinklen og altsaa blive Center-Vinklen i en Polygon, hvis Side er $AB$ (§. 54. Till. 2 og 3.). Saaledes vil den her i Femkanten være $180^\circ - (2 \times 54^\circ) =$

180° — 108° = 72° som er Femteparten af den hele Peripherie, der saaledes lader sig dele i 5 ligestore Dele, og den forlangte Polygon afsætte.

§. 57.

Opgave: Om en Cirkel (Fig. 28.) at tegne en regulær Polygon af et vist Antal Sider, naar Cirklens Peripherie kan deles i det forlangte Antal Dele.

Opløs. Peripherien deles i det forlangte Antal Dele (§. 53.) og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Tangenter (§. 46. Till. 1.) som da blive Siderne til den forlangte Polygon. At saavel Sider som Vinkler saaledes blive ligestore og Polygonen altsaa regulær følger af §. 50.

## Om Forhold og Proportion mellem Liniers og Figurers Ligedannhed.

§. 58.

Forkl. En Størrelse (f. Ex. Linien $AD$) som nøiagtig kan udmaales ved en anden $CF$ siges at være et Mangefold (multiplum) af den anden; og denne at være en aliqvot Deel (pars aliqvota) submultiplum af den første, og indeholdes altsaa deri et vist Antal Gange f. Ex. $AD$ er $= 3\,CF$, og $CF = \frac{1}{3} AB$.

For-

Forholdet imellem to Linier bestemmes ved at undersøge hvorofte den ene indeholdes i den anden. Er den ene Linie en aliqvot Deel af den anden bliver Exponenten et heelt Tal som f. Ex. Forholdet imellem *AD* og *CF*, hvor Exponenten er 3. Er derimod den mindre Linie ikke nogen aliqvot Deel af den større; men en aliqvot Deel af den mindre er tillige en aliqvot Deel af den større, da bliver Exponenten en uegentlig Brøk hvis Nævner udtrykker Antallet af de aliqvote Dele som den mindre Linie er deelt i og Tælleren angiver hvormange af disse Dele der indeholdes i den større Linie. F. Ex. Exponenten i Forholdet imellem *AB* og *CF* er = $\frac{11}{3}$ da *CF* er inddeelt i 3 ligestore Dele og af disse indeholdes XI i Linien *AB*. I begge disse Tilfælde siges Forholdet at være rationalt og Linierne siges at være commensurable Størrelser (sammenlign. Math. Ex. §. 69.)

Er derimod en nok saa liden aliqvot Deel af den ene Størrelse ikke nogen aliqvot Deel af den anden, da siges Størrelserne at være incommensurable og Forholdet irrationalt; Men da den mindre Størrelse kan tænkes inddeelt i saa mange aliqvote Dele, at een af disse Dele bliver mindre end enhver nok saa liden given Størrelse; saa følger at den irrationale Deel af Forholdet bliver mindre end enhver nok saa liden given Brøk; thi den

den aliqvote Deel af den ene Størrelse; kan vel ikke gandske udmaale den anden, men efterlader en Rest der altid er mindre end den aliqvote Deel, da nu den aliqvote Deel stedse kan tænkes mindre, saa maa og den blevne Rest; tilsidst blive mindre end enhver bestemt endelig Størrelse og saaledes det irrationale Forhold mellem to Størrelser nærme sig til det rationale.

Till. 1. To irrationale Forhold $A : B$ og $C : D$ ere ligestore naar en vis aliqvot Deel af $B$ ($\frac{1}{m} B$) indeholdes ligesaa ofte med en Rest ($n$ Gange $+ R$) i $A$ som samme aliqvote Deel af $D$ ($\frac{1}{m} D$) indeholdes i $C$ med en Rest ($n$ Gange $+ R$) thi da jeg efter den anførte Forklaring kan tænke en af de aliqvote Dele mindre end enhver given Størrelse, saa følger at det irrationale Forhold kan bringes det rationale saa nær at Forskiellen kan ansees som umærkelig.

Till. 2. Da alle Forhold lade sig udtrykke i Tal, og alle Størrelser lade sig betragte som Tal, saa gielder alt hvad i Arithmetiken er sagt om Forhold og Proportioner i Tall ogsaa om Forhold og Proportioner imellem udstrakte Størrelser.

Anm. I Forhold og Proportioner mellem ubenævnte Tall ere alle Ledene af samme Art. Her maa vel Ledene i samme Forhold være Størrelser af en Art; men

men i en Proportion, kunde Leddene i det første Forhold være saavel af samme Art, som Leddene i det andet Forhold, som og af forskiellig.

§. 59.

Læresæt. Antages den ene af en Triangels Sider $ACB$ (Fig. 30.) at være indelt i et vist Antal ligestore Dele, $CD$, $DE$, $EF$, $FA$ og der trækkes Paralleler igiennem alle Delingspunkter, da vil den modstaaende Side blive inddeelt i ligesaa mange ligestore Dele $CG$, $GH$, $HI$, 2c.

Beviis: Trækkes Hielpelinien $GK$ parallel med $AC$, fremkommer Trianglen $GKH$ nu er

$GK = ED = CD$ (§. 30. Till. 1.)

$\angle HGK = HCD$ ⎫
$\angle CHK = CGD$ ⎭ (§. 28.)

Triangl. $GKH$ = Triangl. $CDG$

og $CG = GH$.

Paa samme Maade bevises $GH$, $HI$ og $IB$ at være ligestore.

Till. En given Linie $AC$ (Fig. 34.) deles paa Grund heraf i et forlangt Antal af ligestore Dele ved at afsætte fra $A$ under en vilkaarlig Vinkel en anden ret Linie $AB$ af ubestemt Længde og paa den afsætte det forlangte Antal Dele $AH$, $HI$, $IK$, $KL$, $LB$ dernæst sammenbinde Punkterne $B$ og $C$

og

og igiennem alle Delingspunkterne $L$, $K$, $I$, $H$ trække Paralleler med $BC$, som da vil dele den givne Linie i det forlangte Antal ligestore Dele.

§. 60.

Læresæt. Er i en Triangel $ACB$ (Fig. 31.) Linien $DE$ trukket saaledes, at den skiærer de to Sider og er parallel med den tredie, da skal følgende Proportioner finde Sted: 1) $CA : DA = CB : EB$. 2) $CD : DA = CE : EB$. 3) $AC : DE = AB : DE$.

Beviis: 1) Er $DA$ en aliqvot Deel af $CA$ saa vil naar der trækkes Paralleler (§. 59.) $EB$ være en ligesaa stor aliqvot Deel af $CB$ og altsaa Exponenten i begge Forholdene være samme og Proportionen rigtig (Arith. §. 70.). Er $DA$ ikke nogen aliqvot Deel af $CA$ bestemmes Exponenten efter §. 58. og ved at tænke Paralleler trukne, vil Exponenten i Forholdet $CB : EB$ findes at være den samme, thi sæt at $DA$ inddeles i $m$ Dele og en af disse indeholdes $n$ Gange i $CA$, saa at $CA : DA = n \times \frac{1}{m} DA : DA$ og

$$\frac{CA}{DA} = \frac{n \times \frac{1}{m} DA}{DA} = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

saa vil efter §. 59. ved Paralleler, $EB$ ligeledes inddeles i $m$ Dele og en af disse vil indeholdes $n$

Gange

Gange i $CB$ og altsaa $CB : EB = n \times \frac{1}{m}$ $EB : EB$ og $\frac{CB}{EB} = \frac{n \times \frac{1}{m} EB}{EB} = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$.

2) Af Proportionen $CA : DA = CB : EB$ følger $(CA - DA) : DA = (CB - EB) : EB$ (Arithm. §. 73. 3.) ɔ: $CD : DA = CE : EB$.

3) Igiennem Punktet $D$ trækkes en Hielpelinie $DI$ parallel med $CB$, saa er efter No. 1. $AC : DC = AB : BI$ men $BI = DE$ (§. 30. Till. 1.) altsaa $AC : DC = AB : DE$.

Till. Af disse beviiste Proportioner lade sig udlede mange andre efter Arithm. §. 73.

§. 61.

Læresæt. Ere de to Sider i en Triangel $ABC$ (Fig. 31.) deelte saaledes at $CA : DA = CB : EB$ saa er Skiæringslinien $DE$ parallel med Trianglens tredie Side $AB$.

Beviis: Igiennem ethvert Punkt lader sig trække en Linie parallel med en given (§. 26.) var altsaa $DE$ ikke parallel med $AB$ maatte igiennem $E$ kunde trækkes en anden Linie parallel med $AB$ denne maatte enten falde oven for $DE$ f. Ex. $AF$

men

men saa skulde $CA : DA = CB : FB$ (§. 60.) som er mod Betingelsen eller og neden for f. Ex. i $G$, da skulde $CA : DA = CB : GB$ som er ligeledes umuligt, naar den i Betingelsen anførte Proportion finder Sted; kan saaledes den med $AB$ igiennem $D$ lagte parallele Linie hverken falde oven eller neden for $DE$ maa den falde sammen med $DE$, og $DE$ er altsaa parallel med $AB$.

Till. 1. Staa to rette Linier $AB$, $DC$ (Fig. 32.) imellem to parallele Linier og overskiæres af en tredie $EG$ som er parallel med $AD$ og $BC$ saa er $AE : EB = DG : GC$; thi naar Hielpelinien $AC$ trækkes er i $\Delta\ BAC$ efter den anførte Sætning

$AE : EB = AF : FC$ og i Triangelen $ACD$ er $DG : GC = AF : FC$

altsaa $AE : EB = DG : GC$ (Arith. §. 38)

Veed man derimod om Linierne $AB$ og $CD$ at de staa mellem to parallele Linier og at $AE : EB = DG : GC$ saa er $EG$ parallel med $AD$ og $BC$.

Till. 2. Ere Linierne $AC$ og $HB$ (Fig. 35.) parallele og $AB$, $CD$ staae derimellem og skiære hinanden, da er $AE : EB = CE : ED$. thi naar $AH$ trækkes parallel med $CD$ og $EG$ parallel med $AC$ saa er i Trianglen $HAB$; $AE : EB = AG : GH$ men er $AG = CE$; og

$GH$

$GH = ED$ (§. 30. Till. 1.) altsaa $AE : EB = CE : ED$.

§. 62.

Læresæt. Er i en Triangel $ABC$ (Tab. 3. Fig. 1.) en Vinkel $B$ deelt i to lige Dele; saa skal Delingslinien $BD$ dele den Vinklen modstaaende Side $AC$ i to Dele, der forholde sig til hinanden som Siderne, der indslutte den deelte Vinkel o: $AD : DC = AB : BC$.

Beviis: Efter Betingelsen være Vinklen $ABD = DBC$; Linien $CB$ forlænges og derpaa afsættes $BE = AB$. Punkterne $E$ og $A$ sammenbindes, nu er Vinklen $BEA = EAB$ (§. 13. Till.) og $ABC = BEA + EAB = 2\,BEA = 2\,EAB$ (§. 29.) men efter Betingelsen var $ABC = 2\,ABD = 2\,DBC$ følgelig $2\,BEA = 2\,DBC$ og $BEA = DBC$ ligesaa $2\,EAB = 2\,ABD$ og $EAB = ABD$ altsaa Linien $BD$ parallel med $AE$ (§. 25.) følgelig $AD : DC = EB : BC$ (§. 61.) men $EB = AB$ (ved Construct.) altsaa $AD : DC = AB : BC$.

Modsæt. Skiærer Linien $BD$ Siden $AC$ saaledes at $AD : DC = AB : BC$ saa er Vinklen ved $B$ deelt i to ligestore Dele.

Beviis: Er Linien $BC$ forlænget og $BE = AB$; saa er $AD : DC = EB : BC$ og følgelig $BD$ parallel med $AE$ (§. 61.) Vinklen $ABD = EAB$; og $CBD = BEA$ (§. 28.) nu er $EAB = BEA$ (§. 13. Till. 1.) altsaa $ABD = CBD$.

§. 63.

Læresæt. Ere i et Trapezium $ACDB$ (Fig. 2.) de to Sider $AB$ og $CD$ parallele; da er den Linie $EF$ som deler de to Sider der ikke ere parallele i lige Dele, saa stor som de to parallele Siders halve Summe ɔ: $EF = \frac{1}{2}(CD + AB)$.

Beviis: Efter Betingelsen være $DF = FB$; $CE = EA$; Diagonalen $CB$ trækkes; de parallele Sider halveres i $I$ og $G$, $IF$ og $EG$ trækkes, saa er i Trianglen $CDB$

$DI : IC = DF : FB$ { thi $DI = IC$ og $DF = FB$

altsaa $IF$ parallel med $CB$ (§. 61.). I Trianglen $CAB$ er ligeledes:

$$AE : EC = AG : GB$$

følgelig $EG$ parallel med $CB$ og da $CE = EA$, og $DF = FB$ saa er $CE : EA = DF : FB$

altsaa $EF$ parallel med $CD$ og $AB$ (§. 61.

Till. 1.) Følgelig er $CIHF$ et Parallelogram (§. 30. Till. 1.) og $CI = HF$; ligeledes $EHGB$ et Parallelogram og $EH = GB$

$$\begin{aligned} \text{er nu } & EH = GB = \tfrac{1}{2} AB \\ \text{og } & HF = CI = \tfrac{1}{2} CD \\ \hline \text{saa er } & EH + HF = GB + CI = \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} CD \\ \text{og } & EF = \tfrac{1}{2} (AB + CD). \end{aligned}$$

§. 64.

Læresæt. Er den ene af en retvinklet Triangels Catheter $AB$ (Fig. 5.) inddelt i et vist Antal ligestore Dele, f. Ex. 10 og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Paralleler med den anden $AC$; da vil disse Paralleler bestemme ligesaa mange Dele af $AC$ som $AB$ var inddelt i; saaledes er $vm = \frac{1}{10} AC$; $al = \frac{2}{10}$ $tk = \frac{3}{10}$ o. s. v.

Beviis: Da Linierne $vm$, $al$, $tk$ o. s. v. ere parallele med $AC$, saa er (§. 61.) $AB : vB = AC : vm$, og følgelig $\frac{AB}{vB} = \frac{AC}{vm}$, men $\frac{AB}{vB} = \frac{10\, vB}{vB} = 10$ (vedk. Construktion) følgelig $\frac{AC}{vm} = 10$ og $vm = \frac{1}{10} AC$. Saaledes føres Beviset ogsaa for de øvrige Dele, og [illegible] Steden. Er det bestemte Tal

m. et almindeligt Udtryk; m, da naar $AB = n \times vB$ og $\frac{AB}{vB} = \frac{n \times vB}{vB} = n$ saa er ogsaa $AC = n \times vm$ og $\frac{AC}{vm} =$ $n$, —

Till. Herpaa grundes Tegningen af den formindskede Maalestok, eller Maalestokken med transversal Inddeling. Linien $AB$ (Fig. 6.) f. Ex. være deelt i fire Dele, hver af disse igien i 10; nu forlanges at en af disse tiende Dele igien deles i ti mindre Dele; der afsættes da fra Punktet $A$ en lodret Linie af vilkaarlig Længde (almindelig Maalestokkens Brede), paa denne afsættes det forlangte Antal Dele, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Paralleler, saa vil de forlangte Dele fremkomme, og Rigtigheden heraf indsees af den forklarede Læresætning.

Anm. 1. Er f. Ex. Linien $AB$ antaget at være fire Fod, hvor af den første er deelt i 10 Tomme, saa blive de ved Transversal-Linier frembragte Dele $\frac{1}{10}$, ($\frac{1}{100}$, ꝛc. af en Tomme), $\frac{1}{100}$ af en Fod, og $\frac{1}{400}$ af den hele Maalestok.

Anm. 2. Ved Hielp af Maalestokken deles en ret Linie i et forlangt Antal ligestore Dele saaledes: Man tager den paa Maalestokken og dividerer det da fundne Tal f. Ex. 1675 med Antallet af de forlangte

fangte Dele, og afsætter derpaa fra Begyndelsen af Linien den fundne Qvotient 135. Er Linien længere end Maalestokken, da bruges samme Fremgangsmaade med dens halve, tredie eller fierde Part.

Anm. 3. Ved at dele Randen af Instrumenter ved koncentriske Cirkler i lige Dele, og ved Transversal-Linier igien dele disse, under den, efter Buernes Størrelse mere eller mindre urigtige Forudsætning, at de derved frembragte Dele forholde sig som Vinklerne ved Middelpunktet; har man tilforn brugt den, ved Hielp af den formindskede Maalestok til rette Liniers Deling forklarede Methode, ogsaa til at dele Cirkelbuer. Nøjagtigere og bedre er Inddelingen af Qvadranten, især om man i Stædet for 90 deler den i 96 lige store Dele, som ved bestandig Halvering lader sig giøre. En almindelig Methode til at dele saavel rette Linier som Cirkelbuer i lige Dele har man ved den saa kaldte Vernier eller Nonius, hvis Forklaring jeg, skiønt den egentlig hører hen til den praktiske Geometrie, dog for dens almindelige Brugs Skyld her vil anføre.

## §. 65.

**Opgave: At regne eller indrette en Vernier eller Nonius.**

**Opløs.** *AB* (Fig. VI.) være en ret Linie eller en Cirkelbue, inddelt paa Randen af et Instrument *AC* i 11 lige Dele; og paa en Plade *AD*, der lader sig skyde langs Instrumentets Rand og kaldes Vernier eller Nonius eller over

*AB*,

$AB$; være samme Længde $FD$ deelt i 10 lige Dele. Da nu samme Linie $AB$ har paa Nonius $AD$ een Deel mindre end paa Randen $AC$, og følgelig enhver Deel af $AB$ er større paa $AC$ end paa $AD$ ɔ: $DG > CE$ saa kommer det an paa at finde Forskiellen mellem $DG$ og $CE$.

Da $AB$ er $= 11 \times CE = 10\ DG$ saa er $10 : 11 = CE : DG$ (Arith. §. 70.) følgelig $10 : (11 - 10) = CE : (DG - CE)$ $10 : 1 = CE : (DG - CE)$ (Arith. §. 73 Till. 3.) altsaa $DG - CE = \frac{1}{10} CE$. Er nu $CE = 1$ Tom, saa er $DG - CE = \frac{1}{10}$ Tom $= 1$ Linie. Er $CE = 1$ Grad, saa er $DG - CE = \frac{1}{10}$ Grad $= 6$ Minuter. Saameget altsaa som 1 Linie eller 6 Minuter, staaer da den første Deel paa Nonius over den første Deel paa Randen; følgelig den anden 2 Linier eller 12 Minuter o. s. v.

Brugen af Nonius lader sig heraf let forklare; thi skydes Nonius paa Randen af Instrumentet langs Linien $AB$, saa vil efterhaanden de fra $G$ efter hinanden følgende Delingslinier paa Nonius falde sammen med de fra $E$ efter hinanden følgende Delingslinier paa Randen; og $BD$ vil rykke frem over $BC$, een, to, tre Dele af Nonius o. s. v.

§. 66.

## §. 66.

Forkl. Figurer siges at være ligedanne (similes) naar deres Vinkler ere stykkeviis ligestore og de eenstaaende (ɔ: de der staa lige over for de lige store Vinkler) Sider (latera homologa) ere proportionale f. Ex. Trianglerne $ACB$, $DFE$ (Fig. 3.) Polygonerne $ABCDE$ og $abCde$ (Fig. 11.).

Till. Da i regulære Figurer alle Sider og Vinkler ere ligestore, saa følger, at alle regulære Figurer af lige mange Sider ere ligedanne.

Anm. Ligedanheds Tegnet er (∽) som sættes imellem Figurerne f. Ex. $ACB \backsim DFE$ (Fig. 3.)

## §. 67.

Forkl. Siderne i to Figurer (Fig. 15.) som indslutte lige store Vinkler ved $A$ og $D$ siges at være reciproqve proportionale naar de to Sider i den ene Figur udgiøre de yderste, og de to i den anden de mellemste Led i Proportionen ɔ: naar $AC : DF = DE : AB$.

Anm. I Almindelighed siges to Par Størrelser udtrykte i Tall eller med Bogstaver $a$, $b$ og $c$, $d$; at være reciproqve proportionale naar det ene Par udgiøre de yderste og det andet de mellemste Lede i Proportionen.

§. 68.

Læresæt. To Triangler $ACB$, $DFE$ (Fig. 3.) ere ligedanne, naar Vinklerne i dem begge ere ligestore ɔ: $A = D$; $B = E$.

Beviis: Paa $DE$ afsættes $DG = AB$; paa $DF$ ligeledes $DH = AC$ Punkterne $H$ og $G$ sammenbindes, saa er Trianglen $DHG = ACB$ (§. 12.) Vinklen $HGD = CBA = FED$ følgelig $HG$ parallel med $EF$ (§. 35.) og $DE : DF = DG : DH$ (§. 61.) altsaa $DE : DF = AB : AC$ (da $AB = DG$ og $AC = DH$) fremdeles $DE : EF = AG : GH$ følgelig (da $HG = CB$) $= DE : EF = AC : CB$ og Trianglen $ACB \backsim DEF$ (§. 66.).

Till. Er en ret Linie $HG$ (Fig. 3.) i Trianglen $DFE$ parallel med $EF$ og altsaa Vinklerne ved $H$ og $G$ ligestore med Vinklerne ved $F$ og $E$, saa ere Trianglerne $DFE$ og $DHG$ ligedanne.

§. 69.

Læresæt. To Triangler $ABC$ og $DEF$ (Fig. 4.) ere ligedanne, naar deres Sider ere proportionale ɔ: $AB : AC = DE : DF$; og $AB : BC = DE : EF$.

Be-

Beviis: Paa $DE$ afsættes $DG = AB$ ved $G$ Vinkelen $DGH = DEF$ følgelig $HG$ parallel med $EF$ (§. 25.) og Triangelen $DGH \sim DEF$ (§. 68.). Men i Trianglerne $ACB$ og $DGH$ ere

$AB = DG$ (ved Construktion)

$AC = DH$ thi $AB : AC = DE : DF$ (efter Betingelsen)

$HG = CB$ og $DG : DH = DE : DF$

$AB : AC = DG : DH$

er nu $AB = DG$

saa er $AC = DH$. (Arith. §. 70.) Paa samme Maade vises at $HG = CB$: følgelig $ACB = DHG$ (§. 14.) og altsaa deres Vinkler ligestore, og de ligedanne; er nu $ACB \sim DHG$ og $DHG \sim DEF$ saa er $ACB \sim DEF$.

§. 70.

Læresæt. To Triangler $ABC$ og $DEF$ (Fig. 4.) ere ligedanne, naar een Vinkel er ligestor i dem begge $A = D$; og de to Sider som indslutte Vinklen, ere proportionale ɔ: $DE : DF = AB : AC$.

Beviis: Paa $DE$ afsættes $DG = AB$ Vinklen $DGH = DEF$; Linien $HG$ er da parallel med $EF$ og Vinklen $GHD = EFD$ og følgelig $DHG \sim DEF$ (§. 68.) men i

Triangelerne $ACB$ og $DHG$ ere

$AB = DG$ (ved Construkt.)

$\angle A = \angle D$ (efter Betingelse)

og $AC = DH$ (fordi $AB : AC = DE : DF$ og $DG : DH = DE : DF$ altsaa $AB : AC = DG : DH$ og da $AB = DG$ (ved Construkt.) saa er $AC = DH$ (Arithm. §. 70.)) altsaa $ACB \sim DHG \sim DEF$.

§. 71.

Læresæt. En lodret Linie $CD$ (Fig. 7.) fældet fra den rette Vinkels Spidse $C$ i en retvinklet Triangel $ACB$ paa Hypothenusen, deler den retvinklede Triangel i to mindre Triangler $ACD$ og $CDB$, der begge ere ligedanne med den hele, og altsaa indbyrdes ligedanne.

Beviis: I Trianglen $ACD$ og $ACB$ er Vinklen $A = A$ og $CDA = R = ACB$ altsaa $\Delta\, ACD \sim \Delta\, ACB$. ligeledes er i $\Delta\, CDB$ og $ACB$, Vinklen $B = B$ og $CDB = R = ACB$ altsaa $CDB \sim ACB$. er

nu $ACD \sim ACB$

og $CDB \sim ACB$

saa er $ACD \sim CDB$.

Till. Den lodrette Linie $CD$ bliver en mellemproportional Linie imellem Stykkerne af Hypothenusen $AD$ og $DB$; og enhver af Catheterne

terne $AC$ og $CB$ blive mellemproportional Linier mellem den hele Hypothenuse og det ved Catheten anliggende og af Hypothenusen afskaarne Stykke ɔ: $AD : DC = DC : DB$; $AB : AC = AC : AD$; og $AB : BC = BC : BD$. (§. 66. og 68.)

§. 72.

Læresæt. Naar to Chorder $AB$, $CD$ (Fig. 8.) skiære hinanden i en Cirkel, ere deres Stykker reciproqve proportionale (§. 67. Anm.) ɔ: $AG : GC = GD : GB$.

Beviis: Linierne $AC$ og $BD$ trækkes: saa er i Trianglerne $ACG$ og $GBD$; Vinklen $AGC = BGD$ (§. 17.) $ACG = GBD$ (§. 44. Till. 2.) altsaa $\Delta\, ACG \sim \Delta\, GBD$ (§. 68.) og følgelig $AG : GC = GD : GB$.

Till. Bliver den ene Chorde $AB$ en Diameter og antages at skiære den anden under en ret Vinkel, da vil den halvere den anden (§. 40. Till. 2.) og det halve af Chorden $CD$ vil blive en mellemproportional Linie mellem Diameterens Stykker; thi var $AG : GC = GD : GB$ og efter det anførte $GC = GD$ saa er $AG : GC = GC : GB$ (sammenlign. §. 71. Till.)

§. 73.

Læresæt. Naar to Sekanter $AB$, $BD$ (Fig 9.) skiære hinanden uden for en Cirkel; ere Sekanterne og deres uden for Cirklen liggende Stykker reciproqve proportionale ɔ: $AB : BD = BF : BE$.

Beviis: Naar Hielpelinierne $AF$, $ED$ trækkes, er Vinklen $B = B$; $A = D$ (§. 44. Till. 2.) altsaa $\Delta\, ABF \sim \Delta\, BED$ og $AB$ : $BF = BD : BE$ (§. 66. og 68.) og (efter §. 73. 4. Arithm.) $AB : BD = BF : BE$.

§. 74.

Læresæt. Skiære en Sekant $AB$ og en Tangent $BC$ (Fig. 10.) hinanden uden for en Cirkel; da er Tangenten en mellemproportional Linie imellem den hele Sekant og det Stykke, som ligger uden for Cirklen ɔ: $AB : BC = BC : BD$.

Beviis: Trækkes Hielpelinierne $DC$ og $AC$, saa er $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBC$ (§. 68.): thi Vinklen $B = B$; og Vinklen $DAC = DCB$ (§. 44. og 48.) altsaa $AB : BC = BC : BD$ (§. 66. og 67.).

§. 75.

Opgav. Til tre givne Linier $A$, $B$, $C$ (Fig. VII.) at finde en fierde proportional Linie.

Opløs. Man afsætter en Linie $MN = A$ og i samme Direktion $NO = B$; under en vilkaarlig Vinkel afsættes ved $M$, $MP = C$. Punkterne $N$ og $P$ sammenbindes og igiennem $O$ trækkes $OR$ parallel med $NP$; saa er $PR$ den søgte fierde proportionale Linie.

Beviis: I Triangelen $OMR$ er $NP$ parallel med $OR$ ved Construktion og altsaa (§. 60.) $MN : NO = MP : PR$.

Till. Paa samme Maade deles en given Linie i Dele, der forholde sig til hinanden som Delene af en anden given Linie.

§. 76.

Opgav. Imellem to givne Linier $CD$ og $AB$ (Fig. 7.) at søge en mellemproportional Linie.

Opløs. Man afsætter Linien $AD = AB$ og $DB = CD$ i en ret Linie $AB$, over denne slaaes en halv Cirkel, og fra Punktet $D$ til Cirklens Peripherie opreises en lodret Linie (§. 41.) $DC$, som er den forlangte mellemproportional Linie.

Beviis:

Beviis: Trækkes Linierne $AC$ og $CB$ saa er Vinkelen $ACB = R$ (§. 44. Till. 3.) og Trianglen retvinklet og følgelig $AD : DC = DC : DB$ (§. 71. og 72. Till.).

Till. En anden Opløsning af denne Opgave følger af §. 74. og §. 46. Till.

§. 77.

Forkl. En Linie $AB$ (Fig. VIII.) siges at være deelt i det mellemste og yderste Forhold (secundum mediam et extremam rationem) eller i en sammenhængende Proportion, naar det største Stykke er en mellemproportional Linie mellem den hele Linie og det mindre Stykke ɔ: naar $AB : AD = AD : DB$.

§. 78.

Opgav. At dele en given Linie $AB$ (Fig. VIII.) i det mellemste og yderste Forhold.

Opløs. Paa Enden af $AB$ opreises en lodret Linie $BC = \frac{1}{2} AB$, fra $C$ med Radius $CB$ beskrives en Cirkel; $A$ og $C$ forbindes ved Linien $AC$ og $AD$ afsættes $= AE$ saa er $AB : AD = AD : DB$ og $AD$ er det største Stykke af Linien $AB$.

Beviis. Forlænges $AC$ til $H$, saa da $AB$ er lodret paa $BC$ og følgelig en Tangent (§. 46.)

(§. 46.) saa er $AH : AB = AB : AD$ (§. 74.) og følgelig $(AH - AB) : AB = (AB - AE) : AE$ (Arithm. §. 73.) nu er $AB = 2 CE = EH$ og $AD = AE$ (ved Construct.) altsaa $(AH - HE) : AB = (AB - AD) : AD$, det er $AD : AB = DB : AD$ og invertendo (Arithm. §. 73.) $AB : AD = AD : DB$. Fremdeles da $AC$ er $> AB$ (§. 22. Till. 1.) og $CE = \frac{1}{2} AB$ saa er $(AC - CE) = AD > \frac{1}{2} AB$ og saaledes $AD$ det største Stykke af Linien $AB$.

§. 79.

Læresæt. Er Radius $AC$ i en Cirkel (Fig. IX.) deelt i det mellemste og yderste Forhold, og Chorden $AE$ tages liig det største Stykke af Radius $DC$ saa er i den ligebenede Triangel $ACE$ enhver af Vinklerne ved Grundlinien $CAE$ og $CEA$ dobbelt saa store som Vinklen ved Toppunktet $C$.

Beviis: Trækkes Hielpelinien $DE$ er $\Delta ACE \sim \Delta ADE$ (§. 70.) fordi Vinklen $A = A$, og $AC : AE = AE : AD$ (efter Betingelsen); altsaa Vinklen $AED =$ Vinklen $C$; da nu fremdeles efter Betingelsen $CE : EA = CD : DA$, saa er Vinklen $E$ deelt i to lige

Dele

Dele (§. 62.) og Vinklen $AED = \frac{1}{2}$ Vinkel $E$ men Vinklen $C = AED$ altsaa $C = \frac{1}{2} E$.

Till. Heraf sees hvorledes en ligebeenet Triangel beskrives hvori enhver af Vinklerne ved Grundlinien er dobbelt saa stor som Vinklen ved Toppunktet.

§. 80.

Opgave. I en Cirkel at tegne en regulair Femkant og Tikant.

Opløs. Radius i den givne Cirkel være $CA$ (Fig. 9.), den deles i det yderste og mellemste Forhold (§. 78.) saa at $CD$ er mellemproportional Linien mellem $CA$ og $DA$, fra $A$ afsættes Chorderne $AI$, $AE = CD$ saa er $AE$ Siden i Tikanten og $IE$ Siden i Femkanten.

Beviis: I Triangelen $ACE$ er Vinklen $CAE = 2\,C$ og $CEA = 2\,C$ (§. 79.) altsaa $CAE + CEA + C = 5\,C$, følgelig $5\,C = 2\,R$ o: $180°$ (§. 29. Till. 1.) og $C = \frac{180°}{5}$ (§. 10. Till. 2.) $= \frac{360°}{10}$; følgelig Buen $BD = \frac{360°}{10} =$ Tiende Delen af den hele Cirkelperipherie (§. 9. Anm. 2.) Buen $AE$ lader sig altsaa afsætte 10 Gange paa den hele Peripherie og naar Chorderne dertil trækkes, har man den regulaire Tikant (§. 53. Till.). Ligeledes er

Buen

Buen $IAE = IA + AE = 2\,AE$ (ved Construktion) altsaa $= \frac{360^\circ}{5} =$ femte Parten af den hele Peripherie, naar den altsaa afsættes fem Gange og Chorderne trækkes, fremkommer den forlangte regulære Femkant.

§. 81.

Opgave: I en given Cirkel at tegne en regulær Femtenkant.

Opløs. Man beskriver i Cirklen (Fig. IX.) en regulær Triangel $FGK$ (§. 53. Till. 1.) og en regulær Femkant (§. 80.) $EILGM$ saa er Buen $FI$ en femtende Deel af den hele Peripherie, og den dertil hørende Chorde er Siden til den forlangte Femtenkant.

Beviis: Buen $IL$ er $= LG = \frac{360^\circ}{5}$ altsaa Buen $ILG = \frac{2}{5} \times 360^\circ = \frac{6}{15} \times 360^\circ$ men nu er Buen $GLF = \frac{1}{3} \times 360^\circ = \frac{5}{15} \times 360^\circ$ altsaa Buen $FI = (GLI - GLF) = \frac{6}{15} \times 360^\circ - \frac{5}{15} \times 360^\circ = \frac{1}{15} \times 360^\circ =$ en femtende Deel af den hele Peripherie.

§. 82.

Læresæt. Mangekantede ligedanne Figurer inddeles ved eensliggende (ɔ: som ere trukne imellem ligestore Vinklers V Spidser) Diagonaler i ligemange ligedanne Triangler.

Beviis: Figurerne være *ABCDE* og *abCde* (Fig. 11.) Diagonalerne *EeC*, *AaC* saa er Vinklen *D* = *d* og *ED* : *DC* = *ed* : *dc* (efter Betingelsen og §. 66.) altsaa △ *EDC* ∾ △ *edC* (§. 70.). Fremdeles er ∠ *DEA* = ∠ *dea* (efter Betingelsen) ∠ *DEC* = ∠ *deC* (thi △ *EDC* ∾ *edC*) følgelig *DEA* — *DEC* = *dea* — *deC* ɔ: Vinklen *CEA* = *Cea*. Nu er *DE* : *de* = *EA* : *ea* (§. 52.) og *DE* : *de* = *EC* : *eC* (fordi △ *DEC* ∾ *deC*) altsaa *EA* : *ea* = *EC* : *eC* og △ *AEC* ∾ △ *aeC* (§. 70.) og saaledes kan ethvert Par af de opkomne Triangler bevises at være ligedanne.

Till. Inddeles altsaa en mangekantet Figur ved Diagonaler i Triangler, og der afsættes andre med dem ligedanne Triangler i samme Orden, da bliver den derved fremkomne Figur ligedan med den første.

§. 83.

Læresæt. Ligedanne Figurers Omkredse forholde sig til hinanden som to af deres eensstaaende Sider eller eensliggende Diagonaler ɔ: Peripherien $ABEDC$ : Periph. $abedc = ED : ed$ (Fig. 11.).

Beviis: Da Figurerne ere ligedanne saa er

$$AB : ab = AB : ab$$
$$AB : ab = AE : ae$$
$$AB : ab = ED : ed$$
$$AB : ab = DC : dc$$
$$AB : ab = BC : bc$$

$AB : ab = (AB + AE + ED + DC + BC) : (ab + ae + ed + dc + bc)$ ɔ: Periph. $ABEDC$ : Periph. $abedc = AB : ab = ED : ed$ o. s. v. men $AB : ab = AC : ac$ (fordi $\triangle ABC \sim abc$) altsaa Periph. $ABEDC$ : Periph. $abedc = AC : ac$.

§. 84.

Læresæt. Ere to ligedanne Figurer $ABCDE$ og $abcde$ (Fig. 12.) indskrevne i Cirkler, saa forholde deres Omkredse sig, som Radierne eller Diametrene af de omskrevne Cirkler.

Beviis. Er $F$ og $f$ Cirklernes Middelpuncter, og altsaa $AG$, $ag$ Diametrene og man

trækker $AC$, $BG$ i den eene, og $ac$, $bg$ i den anden Figur, saa er Vinklen $ABC$ = Vinkl. $abc$ og $AB : ab = BC : bc$ (§. 66.) følgelig Vinkl. $BCA = bca$ og derfor $BGA = bga$ (§. 44. Till. 2.) fremdeles er Vinklen $ABG = abg$ (§. 44. Till. 3.) altsaa $\Delta ABG \sim \Delta abg$ (§. 68.) og $AB : ab = AG : ag = AF : af$. Men Figurernes Peripherier forholde sig som $AB : ab$ (§. 83.) følgelig ogsaa som $AG : ag$ eller som $AF : af$.

Till. 1. Da alle regulære Figurer af ligemange Sider ere ligedanne, og de alle kan indskrives i Cirkler (§. 55.) og omskrives om Cirkler, saa forholde deres Peripherier sig som Radierne i de ind- eller omskrevne Cirkler.

Till. 2. Ere to regulære Figurer beskrevne den ene i, den anden om, samme Cirkel, (en Side i den omskrevne være f. Ex. $LM$ og en Side i den indskrevne $AB$ (Fig. 29.),) saa forholde deres Omkredse sig til hinanden som $CL : CA = CA : CD$.

Till. 3. Jo flere Sider to ligesidede regulære Polygoner, som ere beskrevne i og om samme Cirkel faae, jo mindre Forskiel bliver der imellem Radierne i deres omskrevne Cirkler, og da Polygonernes Peripherier forholde sig som disse Radier, nærme de sig stedse mere til hinanden.

§. 85.

Opgave: At beskrive i og om en Cirkel to regulære Polygoner af lige mange Sider, saaledes at Exponenten af Forholdet mellem deres Peripherier er mindre end ethvert givet Tal, der er noget lidet større end een ɔ: $< 1 + \frac{1}{m}$.

Opløs. Peripherien af den omskrevne Polygon vil vi kalde $P$ og af den indskrevne $p$. I Cirklen beskrives en regulær Polygon hvis ene Side være $AB$, (Fig. 29.) og om Cirklen en af ligesaa mange Sider hvis ene Side være $LM$; saa er $P : p = CL : CA$ (§. 84. Till. 1.) og $\frac{P}{p} = \frac{CL}{CA}$ er nu $CA$ deelt i $m$ Dele hvoraf $AL$ er een saa er $\frac{CL}{CA} = \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA}$ $= 1 + \frac{1}{m}$; nu beskrives to andre Polygoner af et dobbelt Antal Sider, saaledes at Siden i den indskrevne er $AD$ og i den omskrevne $NC$ saa er:

$P : p = CN : CA$ og $\frac{P}{p} = \frac{CN}{CA}$ nu $= 1$

er

er $CN < CL$ altsaa $\frac{CN}{CA} < \frac{CL}{CA}$

$$\frac{CN}{CA} < \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA}$$

$$\frac{CN}{CA} < 1 + \frac{1}{m}$$

og da $\frac{P}{p}$ var $= \frac{CN}{CA}$ saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$.

Till. 1. Der lade sig i Følge heraf beskrive to Polygoner i og om Cirklen af saa mange Sider at Differencen imellem deres Peripherier er mindre end enhver nok saa liden Deel af Radius ɔ: at $d < \frac{1}{m} CA$.

Beviis: Efter forrige §. var $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$ antages nu enhver af disse $m$ Dele deelt i 2 mindre Dele, saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{2}$ men kaldes Differencen imellem Polygonernes Peripherier $d$ saa er

$P =$

$$P = p + d \text{ altsaa } \frac{p+d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \tfrac{1}{8}$$

$$1 + \frac{d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \tfrac{1}{8}$$

$$\frac{d}{p} < \frac{1}{m} \times \tfrac{1}{8}$$

$$d < \frac{1}{m} \times \tfrac{1}{8} p$$

men da en om Cirklen beskreven Quadrat er 8 Gange saa stor som Radius, og Cirklens Peripherie er mindre end Peripherien af enhver omskreven Figur og Peripherien af en indskreven Figur igien mindre end Cirkel-Peripherien, saa følger at $p < 8 \cdot CA$ og altsaa $\tfrac{1}{8} p < CA$ var altsaa $d < \frac{1}{m} \times \tfrac{1}{8} p$, saa er ogsaa $d < \frac{1}{m} CA$.

Till. 2. Kaldes Differentsen imellem Cirklens Peripherie ($\Pi$) og den ind- eller omskrevne Polygons Peripherie $d$, saa følger, da Cirklens Peripherie er større end Peripherien af enhver indskreven og mindre end Peripherien af enhver omskreven Polygon, at [illegible] og følgelig $< \frac{1}{m}$ $CA$. Det samme altsaa [illegible]

§. 88.

Læresæt. Fladerne af Triangler ($ABC$ og $DEF$ Fig. 16 og 17.) og Parallelogrammer i Almindelighed forholde sig som Producterne af deres Grundlinier og Hoider; eller ere i et Forhold, sammensat af Forholdene mellem deres Grundlinier $AB$ og $DF$ og Hoider $CH$ og $EI$.

Beviis: Linien $EI$ i $\triangle DEF$ forlænges til $G$ saa at $IG = CH$ og fra $G$ trækkes Linier til $D$ og $F$. Naar nu Trianglerne $ABC$ og $DFG$ sammenlignes:

saa er $ABC : DFG = AB : DF$ (§. 86.)

ligeledes er $DFG : DEF = CH(GI) : EI$ (§. 87.)

altsaa $ABC : DEF = AB \times CH : DF \times EI$ (Arithm. §. 74.)

eller $ABC : DEF = \left\{ \begin{array}{l} AB : DF \\ CH : EI \end{array} \right.$

Anm. Beviset for Parallelogrammer føres paa samme Maade.

§. 89.

Læresæt. Ere to Triangler $ABC$, $DEF$ (Fig. 37.) (og to Parallelogrammer) ligestore; saa ere deres Grundlinier og Hoider reciproqve proportionale ɔ: $AB : DE = GF : CH$.

CH.

CH. Og ere Grundlinier og Hoider i to Triangler eller Parallelogrammer reciproqve proportionale: saa ere de ligestore.

Beviis: 1. △ *ABC* : △ *DEF* = *AB* × *CH* : *DE* × *FG* (§. 89.) nu er *ABC* = *DEF* (efter Betingelsen) altsaa *AB* × *CH* = *DE* × *FG* (Arithm. §. 70.) og følgelig *AB* : *DE* = *FG* : *CH* (Arithm. §. 71. Till. 2.).

2. Er *AB* : *DE* = *GF* : *CH* (efter Betingelsen) saa er *AB* × *CH* = *DE* × *GF* (Arithm. §. 71.) og da △ *ABC* : △ *DEF* = *AB* × *CH* : *DE* × *FG* saa naar *AB* × *CH* = *DE* × *FG* er ogsaa △ *ABC* = △ *DEF*.

Anm. Beviset for Parallelogrammer føres paa samme Maade.

Till. 1. Ere fire rette Linier proportionale, saa er Rectanglet af de to yderste i Proportionen lig Rectanglet af de to mellemste.

Till. 2. En Qvadrat *EFGH* (Fig. 20.) er ligesaa stor som en Rectangel *ABCD* (Fig. 18.) naar Qvadratens Side er en mellem Proportional Linie mellem Rectanglens Grundlinie og Høide, og omvendt.

§. 90.

Læresæt. Ere i to Triangler $ABC$, $DEF$ (Fig. XI.) (ogsaa i to Parallelogrammer) en Vinkel $A = D$ og de Sider som indeslutte de ligestore Vinkler ere reciproqve proportionale, (§. 67.) saa ere Trianglerne ligestore. Og ere to Triangler ligestore og have en ligestor Vinkel, da ere de Sider som indslutte de ligestore Vinkler reciproqve proportionale.

Beviis: 1. Efter Betingelsen er $AB : DE = DF : AC$; fældes nu fra $C$ og $F$ de perpendikulære Høider $CI$ og $FH$, saa er $\angle A = \angle D$, og $\angle CIA = R = \angle FHD$ (ved Construktion) altsaa $\triangle ACI \sim \triangle DFH$ (§. 68.) og $DF : AC = FH : CI$ (§. 66.) følgelig $AB : DE = FH : CI$ og $\triangle ABC = \triangle DEF$ (§. 89.).

2. Ere Trianglerne ligestore, saa er naar Høiderne fældes $AB : DE = FH : CI$ (§. 89.) men er Vinklen $A = D$, saa er $\triangle ACI \sim \triangle DFH$ altsaa $FH : CI = DF : AC$ og følgelig $AB : DE = DF : AC$.

Anm. For Parallelogrammer føres Beviset paa samme Maade.

Till. 1. To Triangler $ACB$ og $DFE$ (Fig. XI.) som og Parallelogrammer som have en ligestor Vinkel $A = D$ ere i et Forhold til hinanden

anden, sammensat af Forholdet mellem de Sider der indslutte de ligestore Vinkler eller forholde sig som Produktet af de Sider der indslutte de ligestore Vinkler

thi $\triangle ACB : \triangle DEF = \begin{cases} BB : DE \\ CI : FH \end{cases}$ (§. 88.)

men $\triangle\ ACI \sim DFH$ altsaa $AC : DF = CI : FH$ følgelig

$$\triangle\ ACB : DEF = \begin{cases} AB : DE \\ AC : DF \end{cases} = AB \times AC : DE \times DF.$$

Till. 2. Forholdet mellem to Qvadrater er dobbelt saa høit som Forholdet mellem deres Sider, eller to Qvadrater forholde sig som Qvadrattallene af deres Sider.

§. 91.

Læresæt. Fladerne af to ligedannede Triangler $ACB$ og $DFE$ (Fig. 16 og 17.) forholde sig som Qvadraterne paa to af deres eensstaaende Sider.

Beviis: $\triangle ACB : DEF = \begin{cases} AB : DF \\ CH : FI \end{cases}$ (§. 88.) $\triangle ACB \sim DEF$ (efter Betingelsen) altsaa:

$$AB : DF = AC : DE$$

$\triangle\ ACH \sim \triangle\ DEI$ (thi $\angle A = \angle D$ og $\angle E$

∠ $EID = 1\,R = CHA$) følgelig: $CH : BI = AC : DE$; ligestore Forhold kan sættes i Stæden for hinanden, og saaledes er $\triangle ACB$ : $\triangle DEF = \left\{ \begin{matrix} AC : DE \\ AC : DE \end{matrix} \right. = AC^2 : DE^2$.

Anm. Paa samme Maade bevises at de forholde sig som Qvadraterne paa deres eenstaaende Grundlinier, og eenstaaende Høider.

§. 92.

Læresæt. Mangekantede ligedanne Figurers Overflader $ABCDE$ og $abCde$ (Fig. 11, 12.) forholde sig som Qvadraterne paa to af deres eenstaaende Sider.

Beviis: Ved Diagonaler inddeles Figurerne i ligemange ligedanne Triangler (§. 82.) og saa er

$\triangle EDC : \triangle edC = ED^2 : ed^2$

$\triangle EAC : \triangle eaC = EA^2 : ea^2 = ED^2 : ed^2$

$\triangle ABC : \triangle abC = AB^2 : ab^2 = ED^2 : ed^2$

altsaa $\triangle (EDC + EAC + ABC) : \triangle (edC + eaC + abC) = ED^2 : ed^2$

d. e. Fig. $ABCDE$ : Fig. $abCde = ED^2 : ed^2$.

Tillæg. Regulaire Figurer af lige Antal Sider forholde sig som Qvadraterne paa Radierne eller Diametrene i deres omskrevne og indskrevne Kirkler.

Till.

Till. 2. Da Cirkler kan ansees som regulaire, uendelig mangekantede Polygoner (§. 85. Till. 2.) saa følger: at alle Cirkler ere ligedannede Figurer, og at deres Flader forholde sig som Qvadraterne paa deres Radier eller Diametre.

## Om Liniers og retlinede plane Figurers Udmaaling.

§. 93.

Forkl. At udmaale en Størrelse er at sammenligne den med en bekiendt Størrelse af samme Art, som kaldes Maal eller Maalestok. Til at udmaale rette Linier, bruges altsaa en Linie til Maalestok; til at udmaale Flader, en Flade, og til at udmaale Legemer et Legeme. Den vilkaarlige rette Linie, som antages til Eenhed eller Maal for Linier kaldes en Fod. Foden inddeles igien enten efter Decimal-Inddeling i ti Tommer, og Tommen i ti Linier, og ti Fod giøre en Rode, eller efter Duodecimal-Inddeling i 12 Tommer, Tommen i 12 Linier, o. s. v. Disse Dele betegnes ved (°, ′, ″, ‴) ligesom Grader, Minuter, Sekunder f. Ex. 2°, 7′, 10″, 9‴, læses 2 Roder, 7 Fod, 10 Tommer, 9 Linier.

Till.

Till. 1. I Decimalmaal forvandles det større Maal til det næstfølgende mindre ved at føie et Nul til f. Ex. 8° = 80′ = 800″ = 8000‴ det mindre derimod til det næstforegaaende høiere ved med et Comma at afskiære det yderste Ziffer mod høire og ansee det som Decimalbrøk f. Ex. 3487‴ = 348,7″ = 34,87′ = 3,487°.

Till. 2. I Duodecimalmaal derimod forvandles større Maal til mindre ved at multiplicere, og mindre til større ved at dividere med 12.

Anm. 1. Længden af en Fod er meget forskiellig i de forskiellige Lande, og man maa derfor ved enhver Opmaaling bestemme hvad Længde Foden har. Det er altsaa vigtigt at kiende Forholdet imellem Fodmaalet i forskiellige Lande og Steder. Nogle af de vigtigste Landes og Stæders Fodmaal kiendes af følgende Tabel; som viser hvor mange Pariser Linier (hvoraf 1 Fod har 144), Foden har i andre Stæder

| | | |
|---|---|---|
| En Fod i Aachen har . . . | 128,5 | Pariser Linier |
| Amsterdam . . . | 125,5 | |
| Berlin . . . | 137,6 | |
| Bremen . . . | [illegible] | |
| Cöln . . . | [illegible] | |
| Dannemark . . . | 139,13 | |
| Engelland . . . | 135,16 | |
| Frankfurt . . . | 127 | |
| Hamburg . . . | 127 | |

En

| | | |
|---|---|---|
| En Fod i Holsteen har | . . | 132,3 Pariser Linier |
| Königsberg | . . . | 139,12 |
| Østerrigske Nederlande | | 126,6 |
| Paris | . . . . | 144 |
| Portugal | . . . | 145,3 |
| Rhinlandsk | . . . | 139,13 |
| Rom | . . . . . | 110,9 |
| Rusland | . . . | 135 , |
| Sachsen | . . . . | 125,1 |
| Schweitz | . . . | 133 |
| Spanien | . . . | 125,3 |
| Sverrig | . . . | 131,6 |
| Strasburg | . . . | 128,2 |
| Venedig | . . . | 153,7 |
| Wien | . . . . | 140,12 |
| Zürich | . . . . | 133 |

Anm. 2. Efter den allernyeste Opmaaling af en Meridiangrad i Frankrig er af National-Conventen dekreteret en almindelig Reform i Maal og Vægt. I Aaret 1798 er igien skeet fra Direktorium i den franske Republik en Indbydelse til andre Stater, at sende lærde og kyndige Mænd til Paris for at overlægge med de dertil udnævnte Pariser Lærde, om at bestemme en almindelig Grund for all Maal og Vægt. Saa anseeligt og nyttigt som dette vilde være, saa mange Vanskeligheder vil det være underkastet. Man venter imidlertid med Længsel hvad Udfaldet af disse Deliberationer vil blive. Herfra er efter Regieringens Anmodning og paa dens Bekostning Justitsraad og Professor Bugge reist i dette Ærende til Paris.

§. 94.

Opgave: At forvandle Duodecimalmaal til Decimalmaal og omvendt.

Opløsn. Antager man Foden at være den samme, saa, da den efter Decimalinddeling er = 10 Tomme og efter Duodecimal = 12 Tomme, følger at, naar vi kalde Duodecimaltomme $z$ og Decimaltomme $y$, ere $10\,y = 12\,z$ og altsaa $y = 1{,}2\,z$ og $z = 0{,}8333\,y$. Decimaltommer forvandles altsaa til Duodecimal ved at multipliceres med 1,2 og Duodecimaltommer til Decimal ved at multipliceres med 0,8333 f. Ex. 7 Decimaltommer er $= 7 \times 1{,}2 = 8{,}4$ Duodecimaltommer.

Fremdeles da en Tomme efter Duodecimalmaal er 12 Linier og efter Decimalmaal 10, saa følger at en Fod efter Duodecimalmaal er = 144 Linier og efter Decimalmaal 100, altsaa naar vi kalde Decimallinien $u$ og Duodecimal $v$ saa ere $144\,v = 100\,u$ og $u = 1{,}44\,v$ og $v = 0{,}694\ldots u$. Forvandlingen skeer altsaa som ved Tommer ved Multiplication f. Ex. $8\,u = 8 \times 1{,}44\,v = 11{,}52\,v$ og $8\,v = 8 \times 0{,}6944 = 5{,}552\,u$.

Anm. Forskiellige Landes-Fodmaal reduceres naar man af den anførte Tabel veed Forholdet, efter Arithmetiken §. 77. 3.

§. 95.

Forkl. Da Maalestokken altid maa være af samme Art som Størrelsen der skal udmaales, saa følger, at til Fladers Udmaalning maa til Maalestok antages en Flade. Af alle plane Figurer har man dertil valgt Qvadraten, og Figurers Overflade siges at udmaales i Qvadratmaal, ved at see hvor ofte en vis antagen Qvadrat (der kaldes en Qvadratfod; Qvadrattomme, Qvadratlinie eftersom dens Side er een Fod, Tomme eller Linie) kan lægges om derpaa.

Anm. For at skilne Qvadratmaal fra Længdemaal pleier man almindelig efter Tallet som tilkiendegiver Mængden at skrive en lille Qvadrat (□) f. Ex. 52 □′, læses 52 Qvadratfod.

§. 96.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Rectangel $AC$ (Fig. 22.) med Maalestokken $abcd$.

Opløsn. Med een Side af den til Maalestok antagne Qvadrat $ab$, udmaales Rectanglens Grundlinie og Høide; disse Linier multipliceres med hinanden og Produktet er Rectanglens Overflade i Qvadratmaal f. Ex. $AB = 5''$ og $AC = 3''$ saa er Rectangel Fladen $ABCD = 15\,□''$.

Beviis: 1. Trækkes igiennem alle Delingspunkterne paa $AB$ Linier parallele med $AD$ og $BC$ og igiennem Delingspunkterne paa $BC$ Paralleler med $AB$ og $DC$ saa vil hele Fladen blive inddelt i saa mange smaa ligestore Qvadrater hvoraf een er $abcd$ som Produktet af $AB$ og $BC$ indeholder Eenheder. Antallet af Delene $AB$ viser hvormange af de antagne Qvadrater der kan ligge i en Rad og Delene i $BC$ hvormange Rader der kan være.

Beviis: 2. At udmaale Rectanglen $ABCD$ er at see hvorofte Qvadraten $abcd$ kan legges om paa dens Overflade, nu forholde forskiellige Parallelogrammer sig som Produkterne af deres Grundlinier og Høider (§. 88.) altsaa $abcd : ABCD = ab \times bc : AB \times BC$; er nu den antagne Qvadrat = 1 Qvadratfod eller Tomme ꝛc. saa er $1 : ABCD = 1 \times 1 = 1 : AB \times BC$ og følgelig Fladen $ABCD = AB \times BC$ (Arithm. §. 73.).

Till. 1. Da Parallelogrammer, der have samme Grundlinie og Høide ere ligestore (§. 34.) saa følger, at enhver skiævvinklet Parallelogram kan forvandles til en Rectangel og dens Fladeindhold beregnes paa samme Maade som Rectanglens.

Till. 2. Indholden af et Parallelogram $ABCD$ i Qvadratmaal divideret med Grundlinien $AB$ giver Høiden $BC$.

Anm. 1. For Korthedsskyld udtrykker man det saaledes, at Parallelogramernes Grundlinier multipliceres med deres Høider; da disse Linier egentlig udtrykkes ved Tal og disse multipliceres med hinanden. At to Linier virkelig ikke kan multipliceres med hinanden indsees af Arithmetiken.

Anm. 2. At beregne en Figurs Overflade i Qvadratmaal kaldes ogsaa at finde dens Quadratur, eller at qvadrere den, især bruges denne Benævnelse om Cirklens og andre krumlinede Figurers Overflade.

§. 97.

Opgave: At udmaale en Qvadrat (Fig. 23).

Opløsn. Man maaler en af dens Sider med Sidelinien af den til Maalestok antagne Qvadrat $abcd$ og qvadrerer Tallet som angiver Mængden af disse Dele f. Ex. Siden være $4\ ab$, saa er Fladen af Qvadraten $4 \times 4\ abcd = 16\ abcd$.

Beviis: Da Qvadraten er et retvinklet Parallelogram hvis Grundlinie og Høide ere ligestore, saa gielder de §. 96. førte Beviser ligeledes for den.

Till. 1. Omvendt kan man ogsaa af en Qvadratsindhold finde Længden af en af dens Sider;

der; ved at uptrække Roden af det Tal som angiver Fladeindholdet.

Till. 2. En Qvadratfod er efter Duodecimalinddeling 144 og efter Decimalinddeling 100 Qvadrattomme, en Qvadrattomme ligesaa efterhiin Inddeling 144, og efter denne 100 Qvadratlinier.

Till. 3. Qvadratmaal efter Decimalinddeling forvandles altsaa let fra større til det næste mindre naar ved høire Side føies to Nuller til f. Ex. 485 □′ = 48500 □″ = 4850000 □‴; og fra mindre til det næst foregaaende større ved at dividere med 100, som (efter Arithm. §. 83.) skeer meget let ved fra høire stedse at afskiære to Zifre f. Ex. 50709 □‴ = 507 □″ 09 □‴ = 5 □′ 07 □″ 9 □‴. Men ved Duodecimalmaalsreduktion maa multipliceres eller divideres med 144.

Till. 4. Angaaende Sammenligning af Duodecimal- og Decimalqvadratmaal gielder hvad der er sagt §. 94. kun at her naar Foden antages uforandret, 100 Decimalqvadrattommer = 144 Duodecimalqvadrattommer.

Till. 5. Til at reducere forskiellige Landes Qvadratmaal tages Qvadratet af de i Tabellen §. 93. anførte Forholdstal og Reduktionen skeer efter Arithmetiken §. 77. 3.

§. 98.

§. 98.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Triangel $ACB$ (Fig. 21.).

Opløsn. Fra en af Vinkelspidserne $C$ fældes en perpendikulær Linie $CD$ som da er Trianglens Høide og $AB$ dens Grundlinie (§. 33.). Disse Linier maales med den antagne Maalestoks (§. 95.) Sidelinie, og Antallet af Grundliniens Dele multipliceres med Høidens og det fundne Produkt halveres, eller og Grundlinien multipliceres med den halve Høide eller Høiden med den halve Grundlinie.

Beviis: Fladeindholdet af ethvert Parallelogram findes ved at multiplicere dets Grundlinie med Høiden (§. 96.). Trianglen er Halvparten af et Parallelogram, der har samme Grundlinie og Høide (§. 33. Till. 2.) dens Fladeindhold er altsaa Halvparten af et Parallelograms af samme Grundlinie og Høide.

Till. Er en Triangels $ABC$ (Fig. 21.) Fladeindhold bekiendt og dens Grundlinie $AB$, da findes Høiden naar Indholden divideres med den halve Grundlinie. Dog giver dette ikke Høiden for nogen bestemt Triangel, men kuns Beliggenheden af en ubegrændset ret Linie som kunde lægges igiennem $C$ parallel med $AB$, hvori Toppunk-

punkterne maae falde af alle de ligestore Triangler, der kan tegnes over Grundlinien *AB*.

§. 99.

**Opgave:** At udmaale Indholden af et Trapezium *ABCD* (Fig. 26.) som har to parallele Sider.

**Opløsn.** De parallele Siders *AB* og *CD* halve Summa multipliceres med *CE* som bestemmer deres Afstand, det fundne Produkt giver da den forlangte Indhold *ABCD* $= \frac{1}{2}(AB + DC) \times CE$.

**Beviis:** Trækkes en Diagonal fra *C* til *A*; inddeles Trapeziet i Trianglerne *ADC* og *ABC* hvis Indhold sammenlagt udgiøre Trapeziets Indhold; nu er (§. 98.)

$\triangle ACB = \frac{1}{2} AB \times CE$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} DC \times CE$ { thi *AD* er $=$ *CE* (§. 39. Till. 3.)

altsaa $\triangle ACB + ADC = ABCD = \frac{1}{2}(AB \times CE) + \frac{1}{2}(DC \times CE) = \frac{1}{2}(AB + DC) \times CE$.

**Opgave:** At udmaale enhver given Polygons Overflade.

**Opløsn.** Polygonen være *ABCDE*, (Fig. 27.) ved Diagonaler inddeles den i Triangler

glerne

glerne $DEC$, $EAC$ og $ABC$ deres Flader beregnes efter §. 98. og Summen af disse giver Polygonens Fladeindhold.

Beviis: Da alle Triangelfladerne udgiøre hele Polygonfladen, saa indsees uden videre Beviis, at dens Fladeindhold maa være Summen af alle Trianglernes.

Anm. Ved at dele Polygonen ind i Trapeziet med to parallele Sider, lader dens Flade Indhold sig ogsaa beregne efter §. 99.

Till. 1. En regulær Polygon lader sig dele i saa mange ligestore Triangler som den har Sider (§. 55. Till.) hvis Høide bliver Polygonens mindste Radius; dens Indhold findes altsaa ved at beregne en af disse Trianglers Flade og multiplicere denne med Sidernes Antall.

Till. 2. En regulær Polygon forvandles til en eeneste Triangel (§. 55. og §. 35.) hvis Grundlinie er Polygonens Omkreds (Perimeter) og Høiden Polygonens mindste Radius (Tab. 2. Fig. 29. og 33.) dens Indhold findes altsaa ved at multiplicere dens Perimeter med det halve af dens mindste Radius.

Om

## Om Cirklens Udmaalning.

§. 101.

Læresætn. Overfladen af en Cirkel er saa stor som Fladen af en Triangel hvis Grundlinie er Cirklens Peripherie og hvis Høide er Cirklens Radius (Fig. 38.).

Beviis: I og om Cirklen lade sig beskrive regulære Polygoner af saa mange Sider at Exponenten af Forholdet imellem deres Perimetre og Flader er mindre end ethvert Tall, der er noget lidet større end 1 ($< 1 + \frac{1}{m}$) og at Forskiellen imellem deres Perimetre er mindre end en hver nok saa liden Deel af Radius, og at altsaa Forskiellen mellem Peripherie og Flade af Cirklen og den ind- eller omskrevne Polygon ligeledes er mindre end en hver nok saa liden Deel af Radius eller dens Qvadrat. Bliver saaledes Forskiellen imellem Cirklen og den om- eller indskrevne Polygon tilsidst saa ringe at den ikke mere kan angives, saa kan man ansee Cirklen som en Polygon af uendelig mange Sider, og uendelig smaa Buer af Peripherien ere ikke forskiellige fra Chorden eller Tangenten som hører dertil, og dens Overflade at bestaae af en uendelig Mængde smaae Triangler (§. 100. Till. 1. og 2.) der alle kan forvandles til een eene-

ste Triangel hvis Grundlinie er Peripherien og hvis Høide er Radius.

Till. 1. Da alle Cirkler saaledes kan ansees som uendelig mangesidede regulære Polygoner, saa følger at de alle ere ligedanne (§. 66. Till.) og at altsaa deres Peripherier forholde sig som deres Radier eller deres Diametre (§. 92. Till.) og deres Overflader som Qvadraterne af Radierne eller Diametrene.

Till. 2. Naar Peripherien af en Cirkel lod sig udmaale i retlinet Maal, kunde dens Indhold nøiagtig bestemmes og dens Qvadratur findes, men da Peripherien kun kan findes ved Tilnærmelse, nemlig ved at søge Perimeterne af ind- og omskrevne Polygoner af saa mange Sider at Forskiellen imellem dem og Cirkelperipherien vil blive umærkelig, men dog nogen, saa kan Cirklens Qvadratur heller ikke nøyagtigt bestemmes.

§. 102.

Opgav. Naar Siden i en regulær Polygon er givet $= AB$ (Fig. 29.) og Polygonens største Radius $AC$, da at finde 1) Polygonens mindste Radius $CD$ og 2) Siden i en regulær Polygon af dobbelt saa mange Sider $AE$.

Opløsn.

Opløsn. 1) Fra Qvadratet af den givne største Radius subtraheres Qvadratet af den halve Polygonside og af Resten udtrækkes Qvadratroden, som da giver Størrelsen for den forlangte mindste Radius ɔ: $CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2}$.

Beviis: I Triangelen $ACD$ er Vinklen $ADC = R$ altsaa $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (§. 38.) og $CD^2 = AC^2 - AD^2$ men $AD = \frac{1}{2}AB$ og $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$ følgelig $CD^2 = AC^2 - \frac{1}{4}AB^2$ og $CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2}$.

Exemp. Lad $AC = 1$ og $AB$ Siden i en reguleer Sexkant og altsaa $= 1$ (§. 49. Till. 2.) saa er $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732}{2} = 0{,}866 \ldots\ldots$

2) Den fundne mindste Radius $CD$ subtraheres fra den største Radius, Differencen $DE$ qvadreres, og adderes til Qvadratet af den halve Polygonside $AD$; af denne Summa udtrækkes Qvadratroden, som er den forlangte Side $AE$.

Beviis: Trianglen $ADE$ er retvinklet altsaa $AE^2 = AD^2 + DE^2$ men $AD = \frac{1}{2}AB$ og $DE = CE - CD$ altsaa $AE^2 = \frac{1}{4}AB^2 + (AC - CD)^2$ og $AE = \sqrt{(\frac{1}{4}AB^2 + (AC - CD)^2)}$.

Exemp. Antages som før $AC = 1$ og $AB$ at være Sexkantens Side $= 1$ saa er Tolv-

kantens

kantens Side $AE = \sqrt{(\frac{1}{4} + (1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2)}$ $= \sqrt{(\frac{1}{4} + 1 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4})} = \sqrt{(2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0,5176 \ldots$

Anm. Paa samme Maade som man her af Sexkantens Side har fundet Tolvkantens, findes af denne fire og tyve kantens, af den 48 kanten o. s. v. indtil man endelig finder 768 kantens Side = 0,0081 811. . . . naar dette Tall multipliceres med 768 har man Perimetren af en 768 kant = 6,28308 . . . . naar Radius er = 1 altsaa naar Radius er = ½ og Diametren = 1 er Perimetren = 3,14 15. . . . . .

## §. 103.

Opgave: Naar Cirklens Radius $AC$ (Fig. 29.) og Siden i den indskrevne Polygon $AB$ er given, da at finde Siden $ML$ i en omskreven Polygon af lige Antal Sider.

Oplösn. Er Polygonens mindste Radius beregnet efter (§. 102.) da findes den omskrevnes Side $ML$ ved at søge en fierde Proportionallinie til $CD$, $CA$, og $AB$. ɔ: $CD : CA = AB : LM$ kaldes nu Cirklens Radius $r$, den mindste Radius $\varrho$. Siden i den indskrevne Polygon $l$ og i den omskrevne $L$ saa er: $\varrho : r = l : L$ og altsaa $L = \frac{r \times l}{\varrho}$.

Beviis: I Triangleu $CCL$ er Linien $AD$ parallel med $CL$ altsaa $CD : CC = DA :$ $CL$ (§. 60.) følgelig $CD : CC = \frac{1}{2} AB : \frac{1}{2}$ $LM = AB : LM$ ɔ: $\varrho : r = l : L$.

§. 104.

Opgav. At finde Forholdet imellem en Cirkels Diameter og dens Peripherie.

Opløsn. Efter §. 102. og 103. søges Perimetren af en ind- og omskreven 12, 24, 48, 96, 192 . . . . kant. Da nu Cirkelperipherien er større end Perimetren af enhver indskreven og mindre end Perimetren af enhver omskreven Polygon, saa bestemmes derved Grændserne imellem hvilke Cirkelliniens Størrelse som ret Linie ligger. Fordobbler man nu videre Sidernes Antal i den i Cirklen beskrevne regulære Polygon, saa bliver Forskiellen imellem Perimeteren af en saadan Polygon og Cirklens Peripherie tilsidst mindre end enhver bestemt endelig Linie (§.85.). Paa denne Maade lader Cirkellinien sig altsaa bestemme i retlinet Maal saa nøiagtig som det behøves, og tillige Forholdet imellem Diametren og Peripherien hvilket i alle Cirkler er det samme.

Till. 1. Er nu Cirklens Diameter 2' ($d = 2$) og Radius 1' ($r = 1$) saa er Chorden til den 768 Deel af Peripherien ɔ: Siden i en indskreven

skrevne 768 kant = 0,0081812' (§. 102. Anm.) og følgelig Perimeteren = 6,28308' og heraf findes (§. 103.) Perimetren af den om Cirklen beskrevne regulære 768 kant = 6,2831375' Cirkellinien er altsaa større end 6,2830' og mindre end 6,2831 og følgelig omtrent = 6,2830 ($p$ = 6,2830) og $d : p$ = 2 : 6,2830 = 1 : 3,1415. Benævnes nu Peripherien af en Cirkel hvis Diameter er 1 med $\pi$; saa er $\pi$ = 3,1415. Søger man nu paa den forklarede Maade Perimetren af en Polygon der har 2, 4, 8 ꝛc. Gange saa mange Sider, saa kan man stedse nøiagtigere og nærmere finde Forholdet mellem Diametren og Cirklens Peripherie, ɔ: nøiere bestemme Værdien af $\pi$. Paa denne møisommelige Maade fandt Ludolph von Ceulen $\pi$ = 3,141592,653589,793238,46264 3,383279,50. hvilket er bekiendt under Navn af det Ludolphiske Tall.

Anm. 1. Archimedes fandt allerede Forholdet imellem Diameter og Peripherie som 7 : 22, eller $\pi$ = $3\frac{1}{7}$ = 3,142.. og altsaa allerede ved det 3de Decimalziffer for stort. Metius fandt Forholdet imellem Diameter og Peripherie = 113 : 355 = 1 : 3,1415929 og altsaa først ved det 8de Decimalziffer for stort.

Anm. 2. Siden har man ved Hielp af den høiere Mathematik fundet det Ludolphiske Tall langt videre

nemlig Sherwin til 72; Machin til 110 og Lagny til 127 Decimaler.

Anm. 3. Gandske nøiagtig har endnu ingen kundet finde Diameterens Forhold til Peripherien (og det vil rimeligt aldrig kunde findes) thi alle de angivne af Ludolph, og de øvrige fundne Tall give Cirkellinien stedse noget lidet mindre end den virkelig er, da de egentlig angive Perimeteren af en indskreven Polygon med overmaade mange Sider. Imidlertid er Feylen naar antages $\pi = 3,1415$ allerede mindre end $\frac{1}{10000}$ af Diameteren, og ved det Ludolphiske Tal ikke engang $\frac{1}{100}$ af en Qvintilliondeel. Men ved det Lagnyske ikke $\frac{1}{10}$ af en 21 Tilliondeel af Diameteren. Til en Cirkellinies vilkelige Beregning i Længdemaal behøver man altsaa ikke engang hele det Ludolphiske Tall, men man tager kun saa mange Decimaler, som Regningens Nøiagtighed udfordrer. Imidlertid tiener det til at prøve Rigtigheden af de Forhold, som de der vilde finde Cirklens Qvadratur angive at have fundet, og som sædvanlig i de første Decimaler befindes urigtige.

## §. 105.

**Opgave: At finde en Cirkels Peripherie $p$ i retlinet Maal og dens Overflade $a$ i Qvadratmaal naar dens Diameter $d$ er given.**

Oplosn. Den givne Diameter $d$ multipliceres med $\pi$, saa findes Peripherien $p = \pi d$; denne fundne Peripherie multipliceres igien med den halve Radius eller Fierdedelen af Diametren

saa findes Overfladen $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} pr$ eller $= p \times \frac{1}{4} d = \frac{1}{4} dp$.

Beviis: Efter §. 104. Till. 1. er naar Diameteren er 1 Peripherien $= \pi$ altsaa maa følgende Forhold finde Sted $1 : \pi = d : p$ og $p = \frac{\pi d}{1} = d\pi$. Cirkelfladen $a$ er liig Fladen af en Triangel (§. 53. Till. 2.) hvor Grundlinien $AB$ (Fig. 38.) er Peripherien i retlinet Maal $p$ og Høiden saa stor som Radius $r$. Men denne Triangelflade beregnes ved at multiplicere Grundlinien $p$ med den halve Høide $\frac{1}{2} r$ (§. 98.) altsaa Cirkelfladen $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} pr$, men da $d = 2 r$ saa er $\frac{1}{2} d = r$, og $\frac{1}{4} d = \frac{1}{2} r$ følgelig $\frac{1}{2} pr = \frac{1}{4} dp$.

Anm. At rectificere en krum Linie er at trække en ret Linie, som er ligesaa lang; en Cirkellinie kan altsaa rectificeres naar dens Længde paa anførte Maade i retlinet Maal bestemmes.

Till. 1. Er Overfladen af en Cirkel $a = \frac{1}{4} dp$ og $p = d\pi$ saa er $a = \frac{1}{4} d \times d\pi = \frac{1}{4} d^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = d^2 \times \frac{1}{4}\pi = 0{,}785398\ d^2$.

Da $d = 2 r$ saa er $p = 2 r\pi$ altsaa $a = 2 r\pi \times \frac{1}{2} r = r^2\pi$.

Till. 2. Indholden af Ringen mellem to koncentriske Cirkler (Fig. 36.) hvis Radier ere $CB$ og $CG$ er $= (CB^2 - CG^2) \times \pi$ thi den større Cirkelflade er $= CB^2 \times \pi$; den mindre $CG^2 \times \pi$, altsaa deres Differents (som er Fladen af Ringen) $= CB^2 \times \pi - CG^2 \times \pi = (CB^2 - CG^2) \times \pi$.

Till. 3. Er $p = d\pi$ saa er $d = \frac{p}{\pi}$ ɔ: Diameteren findes til en Cirkel naar Peripherien er given i Længdemaal ved at dividere den med $\pi$. og naar $a = r^2\pi$ saa er $r^2 = \frac{a}{\pi}$ og $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ ɔ: naar Overfladen er givet i Qvadratmaal findes Radius til en Cirkel, naar Overfladen divideres med $\pi$ og af den fundne Qvotient udtrækkes Qvadratroden.

§. 106.

Opgave: At bestemme Længden af en Cirkelbue paa 1 Grad, 1 Minut og 1 Sekund i Længdemaal naar Diameteren $d = 1$.

Opløsn. Den fundne (§. 104. Till. 1.) Peripherie i Længdemaal ($\pi$) som svarer til Diameter $d = 1$ divideres med 360 saa har man Længden af een Grad; denne Længde divideret

med

med 60 giver Længden af een Minut, og denne igien med 60 Længden af een Sekund i retlinet Maal. Saaledes er i Decimalbrøk

1 Grad = 0,00872664625

1 Minut = 0,000145444104

1 Sekund = 0,000002424068 af Diameterne.

Beviis: Er efter §. 104. Till. 1: $p = \pi$ naar $d = 1$ saa da $p = 360°$ saa følger at

$$360° = \pi \text{ og } 1° = \frac{\pi}{360}.$$ Er fremdeles $1°$

$$= 60' \text{ saa er } 1' = \frac{1°}{60} = \frac{\pi}{360} : 60 =$$

$$\frac{\pi}{360 \times 60}.$$ h. s. b.

Till. 1. Heraf følger enhver Bue given i Grader som *AEB* (Fig. 29.) og sammensatte; og naar den multipliceres med den givne Diameter, har man dens Længde i samme Maal, hvori Diameteren var givet, Buen være f. Ex. 49°, 28', 13'' og Diameteren = 8', saa er naar Diameteren var = 1.

49° = 0,42728

28' = 0,00406

13'' = 0,0000312

49°, 28', 13'' = 0,43137 multipliceres

nu

nu dette med Diameter $= 8$

saa er $3,45096'$ Længden af Buen i Fodmaal.

Till. 2. Da enhver Sektor eller Udsnit kan ansees som en Triangel hvis Grundlinie er Buen og hvis Høide er Radius, saa findes Fladeindholdet af enhver Sektor som $ACBE$ (Fig. 29.) naar den rectificerede Bue $AEB$ multipliceres med den halve Radius.

Till. 3. Har man saaledes beregnet Indholden af Udsnittet $ACBE$; og derefter beregner Indholdet af Trianglen $ACB$ (§. 98.) og subtraherer det fra Indholdet af Udsnittet; saa findes Fladeindholdet af Segmentet $ADBE$.

## §. 107.

Læresæt. Enhver paa Hypothenusen af en retvinklet Triangel $ABC$ (Fig. 32.) beskreven retlinet Figur $ABF$ er saa stor som de to med den ligedanne paa Catheterne beskrevne Figurer $AEC$ og $BCD$ tilsammentagne.

Beviis: $\Delta\, AEC \sim \Delta\, CBD$ altsaa er

$AEC : CBD = ACq : CBq$ (§. 91.)

følgelig: $(AEC + CBD) : CBD = (ACq + CBq) : CBq$ (Arithm §. 73.)

$(AEC + CBD) : CBD = ABq : CBq$ (§. 38.)

frem-

fremdeles er $ABF : CBD = ABq : CBq$ (§. 91.)

altsaa $ABF : CBD = (AEC + CBD) : CBD$

men $CBD = CBD$

følgelig $ABF = AEC + CBD.$

Anm. Det her for Triangle førte Beviis gielder for alle ligedanne Figurer; altsaa ogsaa for Cirkler.

Till. 1. Beskrives paa de tre Sider af en retvinklet Triangel $ACB$ (Fig. 37.) halve Cirkler; saa ere de to mellem Cirkelbuerne indsluttede Stykker (som kaldes Halvmaaner, Lunulæ) $p$ og $o$ saa store som den retvinklede Triangel; thi naar Segmenterne $n + m$ tages fra Halvcirklen paa Hypothenusen bliver den retvinklede Triangel tilbage; og tages de fra Halvcirklerne paa Catheterne blive Lunulæ tilbage.

Till. 2. To givne ligedanne Figurer forvandles til en ligesaastor og ligedan; naar en retvinklet Triangel tegnes hvori to eenstaaende Sider af de givne Figurer ere Catheter; og paa dens Hypothenuse tegnes en ligedan Figur.

§. 108.

Opgave: At forvandle en given Rectangel (Fig. 30.) til en Qvadrat.

Opløsn.

Opløsn. Mellem Rectanglens Grundlinie $AB$ og Høide $BC$ søges en Mellemproportionallinie (§. 76.) $BG$ som er Siden til den forlangte Qvadrat.

Beviis: Er $AB : BG = BG : BC$ saa er Rectanglen $ABCD$ = Qvadraten $IBGH$ (§. 89. Till. 2.).

Till. Enhver given mangekanted Figur $ABCDE$ (Fig. 34.) forvandles til en Qvadrat naar den inddeles i Triangler, disse forvandles til (§. 36. 2 Till.) en eeneste Rectangel, og denne til en Qvadrat.

---

## Erindring.

Kiøberne bedes ikke at lade denne Deel indbinde men kun hæfte; da nogle faa hertil henhørende Figurer findes paa en Kobbertavle, som følger med anden Deel, da denne første Deel udgives særskildt meest for de Skolers Skyld, hvor den allerede bruges. Den anden Deel, der indeholder Algebra, Stereometrie og plan Trigonometrie, samt de allerførste Grunde af sphærisk Trigonometrie og en meget kort Theorie om Kegelsnittene; vil blive omtrent af samme Størrelse som denne, og udkommer upaatvivlelig i denne Sommer, da Trykningen uafbrudt fortsættes: begge Deele der saaledes vel udgiøre omtrent halvandet Alphabet [illegible] da beqvemt indbinde samlede.

# Anden Deel.

# Algebra.

Videre Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

(See 1 Deel §. 46.)

## Om Brøkregning med Bogstaver.

§. 1.

Da Bogstaver ere almindelige Tegn hvorved alle Arter af Størrelser kan betegnes og en Brøk (Arithmetik §. 29) ikke er andet end een eller flere Dele af en vis som Eenhed betragtet Størrelse, der udtrykkes ved Tæller og Nævner; saa følger at Udtrykkene $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, kan betegne enhver Brøk i Almindelighed; og da Regningen med disse algebraiske eller Bogstav-Brøk skeer efter samme Regler, som i Arithmetiken om Talbrøk ere givne (fra hvilke de ogsaa kun i Udtrykket ere forskiellige) vil enhver der har lært at regne Talbrøk og tillige forstaaer hvad om hele algebraiske eller Bogstav-Stør-

relser er foredraget (1 D. §. 46) ogsaa uden videre Anviisning vide at behandle disse Brøk. Dog vil jeg for større Tydeligheds Skyld og til Øvelse fremsætte nogle Exempler paa de med Brøk sædvanlig forekommende Tilfælde; hvorved tillige de i Arithmetiken givne Regler paa det almindeligste kan oplyses og bevises.

§. 2.

Bogstav-Brøk kan som Tal-Brøk (Ar. §. 31) forkortes, det er udtrykkes med færre Bogstaver naar Tæller og Nævner divideres med samme Bogstav f. Ex. $\frac{am}{bm}$ forkortes ved at dividere med $m$ og bliver da $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Saaledes er og $\frac{mxy}{zmy} = \frac{x}{z}$ thi oploſt er $\frac{mxy}{zmy} = \frac{m \times x \times y}{m \times z \times y}$ naar nu de fælles Factorer udslættes i Tæller og Nævner (hvilket er det samme som at dividere Tæller og Nævner med samme Størrelser) bliver Brøken $\frac{x}{z}$. Brøken $\frac{x+y}{x}$ kan derimod ikke saaledes forkortes; den vilde maaskee ved første Øiekast kunde synes for en Uøvet at skulde være $= y$ (hvilket vilde været Tilfældet om der stod $\frac{xy}{x}$) men $\frac{x+y}{x}$ er $= \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

Ved Brøken $\frac{nx}{my}$ kan aldeles ingen Forkortning finde Sted, da Tæller og Nævner som begge ere sammensatte Størrelser ingen fælles Factorer have.

Anm. Ved flere Exempler at øve Begyndere i disse og lignende Forandringer med Bogstav-Brøk, overlades til det mundtlige Foredrag.

§. 3.

Bogstav-Brøk adderes og subtraheres efterat de ere bragte til eens Benævning (Ar. §. 32) ved at addere og subtrahere deres Tællere ligesom Tal-Brøk (Ar. §. 33).

Ex. 1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$

$= \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$.

Undertiden gives hele Størrelser Brøks Form, og bringes til samme Benævning ligesom Brøker for at forkorte Udtrykket.

Ex. 2) $m + \frac{n}{x} = \frac{m}{1} + \frac{n}{x} = \frac{mx}{x} + \frac{n}{x}$

$= \frac{mx + n}{x}$.

Ex. 3) at addere: $\left(b + \frac{c}{d}\right) + \left(f - \frac{q}{p}\right) + \left(g + \frac{c}{p}\right)$ er $= \frac{bd + c}{d} + \frac{fp - q}{p} + \frac{gp + c}{p} =$

 bdpp

Opløsn. Mellem Rectanglens Grundlinie $AB$ og Høide $BC$ søges en Mellemproportionallinie (§. 76.) $BG$ som er Siden til den forlangte Qvadrat.

Beviis: Er $AB : BG = BG : BC$ saa er Rectanglen $ABCD$ = Qvadraten $IBGH$ (§. 89. Till. 2.).

Till. Enhver given mangekanted Figur $ABCDE$ (Fig. 34.) forvandles til en Qvadrat naar den inddeles i Triangler, disse forvandles til (§. 36. 2 Till.) en eeneste Rectangel, og denne til en Qvadrat.

---

## Erindring.

Kiøberne bedes ikke at lade denne Deel indbinde men kun hæfte; da nogle faa hertil henhørende Figurer findes paa en Kobbertavle, som følger med anden Deel, da denne første Deel udgives særskildt meest for de Skolers Skyld, hvor den allerede bruges. Den anden Deel, der indeholder Algebra, Stereometrie og plan Trigonometrie, samt de allerførste Grunde af sphærisk Trigonometrie og en meget kort Theorie om Kegleſnittene; vil blive omtrent af samme Størrelse som denne, og udkommer uden Tvivl i denne Sommer, da Trykningen uafbrudt fortsættes: begge Deele der saaledes vel udgiøre omtrent halvandet Alphabet [illegible] da beqvemt indbinde samlede.

# Anden Deel.

# A l g e b r a.

## Videre Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

(See 1 Deel §. 46.)

### Om Brøkregning med Bogstaver.

§. 1.

Da Bogstaver ere almindelige Tegn hvorved alle Arter af Størrelser kan betegnes og en Brøk (Arithmetik §. 29) ikke er andet end een eller flere Dele af en vis som Eenhed betragtet Størrelse, der udtrykkes ved Tæller og Nævner; saa følger at Udtrykkene $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, kan betegne enhver Brøk i Almindelighed; og da Regningen med disse algebraiske eller Bogstav-Brøk skeer efter samme Regler, som i Arithmetiken om Talbrøk ere givne (fra hvilke de ogsaa kun i Udtrykket ere forskiellige) vil enhver der har lært at regne Talbrøk og tillige forstaaer hvad om hele algebraiske eller Bogstav-Stør-

relser er foredraget (1 D. §. 46) ogsaa uden videre Anviisning vide at behandle disse Brøk. Dog vil jeg for større Tydeligheds Skyld og til Øvelse fremsætte nogle Exempler paa de med Brøk sædvanlig forekommende Tilfælde; hvorved tillige de i Arithmetiken givne Regler paa det almindeligste kan oplyses og bevises.

§. 2.

Bogstav-Brøk kan som Tal-Brøk (Ar. §. 31) forkortes, det er udtrykkes med færre Bogstaver naar Tæller og Nævner divideres med samme Bogstav f. Ex. $\frac{am}{bm}$ forkortes ved at dividere med $m$ og bliver da $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Saaledes er og $\frac{mxy}{zmy} = \frac{x}{z}$ thi oploest er $\frac{mxy}{zmy} = \frac{m \times x \times y}{m \times z \times y}$ naar nu de fælles Factorer udslættes i Tæller og Nævner (hvilket er det samme som at dividere Tæller og Nævner med samme Størrelser) bliver Brøken $\frac{x}{z}$. Brøken $\frac{x+y}{x}$ kan derimod ikke saaledes forkortes; den vilde maaskee ved første Øiekast kunde synes for en Uøvet at skulde være $= y$ (hvilket vilde været Tilfældet om der stod $\frac{xy}{x}$) men $\frac{x+y}{x}$ er $= \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

Ve

Ved Brøken $\frac{nx}{my}$ kan aldeles ingen Forkortning finde Sted, da Tæller og Nævner som begge ere sammensatte Størrelser ingen fælles Factorer have.

Anm. Ved flere Exempler at øve Begyndere i disse og lignende Forandringer med Bogstav-Brøk, overlades til det mundtlige Foredrag.

## §. 3.

Bogstav-Brøk adderes og subtraheres efterat de ere bragte til eens Benævning (Ar. §. 32) ved at addere og subtrahere deres Tællere ligesom Tal-Brøk (Ar. §. 33).

Ex. 1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}$
$=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$.

Undertiden gives hele Størrelser Brøks Form, og bringes til samme Benævning ligesom Brøker for at forkorte Udtrykket.

Ex. 2) $m+\frac{n}{x}=\frac{m}{1}+\frac{n}{x}=\frac{mx}{x}+\frac{n}{x}$
$=\frac{mx+n}{x}$.

Ex. 3) at addere: $\left(b+\frac{c}{d}\right)+\left(f-\frac{q}{p}\right)+\left(g+\frac{c}{p}\right)$ er $=\frac{bd+c}{d}+\frac{fp-q}{p}+\frac{gp+c}{p}=$

 bdpp

$$\frac{bdpp + cpp}{dpp} + \frac{dfpp - dpq}{dpp} + \frac{dgpp + cdp}{dpp} = \frac{bdpp + cpp + dfpp - dpq + dgpp + cdp}{dpp}$$

og da den Factor $p$ findes i ethvert Led af Tælleren og tillige i Nævneren, saa kan Brøken forkortes (§. 2) ved at dividere Tæller og Nævner med $p$, og bliver da $= \frac{bdp + cp + dfp - dq + dgp + cd}{dp}$

$$= b + f + g + \frac{cp - dq + cd}{dp}.$$

Ex. paa Subtraktion: 1) $\frac{a}{m} - \frac{c}{p} = \frac{ap}{mp} - \frac{cm}{mp} = \frac{ap - cm}{mp}.$

2) $\frac{ab}{f} - \frac{gh}{k} = \frac{abk}{fk} - \frac{fgh}{fk} = \frac{abk - fgh}{fk}.$

3) Fra $\frac{a + c}{b + d}$ at subtrahere $a + \frac{d}{p} = \frac{ap + d}{p}$

$$= \frac{a + c}{b + d} - \frac{ap + d}{p} = \frac{ap + cp}{bp + dp} - \left(\frac{abp + bd + adp + dd}{bp + dp}\right) = \frac{ap + cp - abp - bd - adp - dd}{bp + dp}.$$

§. 4.

Algebraiske Brøk multipliceres med hinanden ligesom simple Brøk, naar Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner (Arith. §. 35).

1 Ex. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et almindeligt Beviis kunde føres saaledes, sæt $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, saa er (Ar. §. 38) $a = bm$, $c = dn$ og $ac = bm \times dn = bdmn$; altsaa $\frac{ac}{bd} = \frac{bdmn}{bd} = mn$; men $m$ var $= \frac{a}{b}$ og $n = \frac{c}{d}$, følgelig $mn = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

Anm. Dette Beviis vil maaskee for Begyndere synes fremmet, men vil let af Læreren kunde oplyses, da det ikke er andet end en Anvendelse af de i Arithm. anførte Grundsætninger.

2 Ex. $\frac{ab-d}{c} \times \frac{de-f}{g} = \frac{(ab-d) \times (de-f)}{cg}$

$= \frac{abde-dde-abf+fd}{cg}$.

§. 5.

En algebraisk Brøk divideres med en anden, naar Divisors Tæller og Nævner omsættes (inverteres) og Dividenden dermed multipliceres.

Ex. 1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Almin-

Almindeligt Beviis: sæt $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$

saa er $a = bm$

$c = dn$

og $\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$

Multipliceer med $d$ saa er $\frac{ad}{c} = \frac{bm}{n}$ (Arith. §. 30)

dividere med $b$ saa er $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$ (Arith. §. 30) og

saaledes $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

2) $\frac{abd}{cf} : \frac{-ab}{c} = \frac{abd}{cf} \times \frac{c}{-ab} = \frac{abcd}{-abcf}$

$= -\frac{d}{f}$ (§. 2).

§. 6.

Enhver Brøk kan ansees som en Qvotient, hvor Dividenden er Tæller og Divisor Nævner; ligesom og i det Tilfælde, at der ved Divisionen bliver noget tilovers der ikke videre lader sig dividere (Arith. §. 46), da udtrykkes det som Brøk. I det Tilfælde at Tælleren i en saadan Brøk eller Dividenden er en enkelt algebraisk Størrelse, og Nævneren eller Divisor en sammensat, kan Brøkens Værdie eller Qvotienten ikke udtrykkes paa

anden

anden Maade end ved en uendelig Tal-Række. Foruden det i Arithm. §. 46 herpaa anførte Exempel, vil jeg her endnu for den Anvendelse deraf i det følgende kan giøres, anføre et Par Exempler.

Saaledes er $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{aa} + \frac{cbb}{aaa} - \frac{cbbb}{aaaa} + \frac{cbbbb}{aaaaa}$ o. s. f.

Divisionen seer saaledes ud:

Divisor Dividenden Quotienten

$$a + b\,)\quad c\quad \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} - \frac{bbbc}{aaaa}\right.$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$- \quad -$$

$$- \frac{bc}{a}$$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{bbc}{aa}$$

$$\frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaa}$$

$$- \quad -$$

$$- \frac{bbbc}{aaa}$$

$$- \frac{bbbc}{aaa} - \frac{bbbbc}{aaaa}$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{bbbbc}{aaaa}$$

og

og ved at vedblive vilde man finde den ovenanførte Qvotient, der ogsaa kunde udtrykkes saaledes (Arithm. §. 40.)

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a^5} \text{ o. s. v.}$$

Da $c$ findes i alle Qvotientens Tællere som Factor, saa kan Qvotienten ogsaa forkortet udtrykkes paa denne Maade:

$$\frac{c}{a+b} = c \times \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}\right).$$

Anm. I den anførte Rad afvexlede Tegnene + og — som vil skee naar begge Divisors Led have samme Tegn som Dividenden: tages derimod i Divisor det eene Led nægtende som $a - b$, da vilde alle Ledene i Raden blive bekræftende, og Exemplet blive saadant:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaaa} \text{ o. s. v.}$$

eller $\frac{a-b}{c} = c \times \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{b^3}{a^4}\right.$ o. s. v.)

§. 7.

Vil man anvende denne almindelige Form paa mere enkelte Tilfælde, da sætter man i Stædet for de almindelige Tegn bestemte Værdier.

Lad

Lad være f. Ex. $c = 1$, og Raden bliver da efter Formen fra $\frac{c}{a+b}$ saaledes

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \text{etc.}$$

Lægges den i forrige § nævnte Form $\frac{a}{a-b}$ til Grund, og man tage $a = 1$, $b = 1$, saa faae man $\frac{c}{1-1} = \frac{c}{0} = c + c + c + c + c + \text{etc.}$

ɔ: $\frac{c}{0}$ giver en Qvotient som bestaaer af $c$ uendelig mange Gange igjentaget ɔ: en uendelig stor Størrelse (som allerede er anmærket §. 25 Arithm.) og som pleier at betegnes saaledes $\frac{c}{0} = \infty$.

Enhver Tal-Brøk kan ogsaa efter en af disse Former udtrykkes ved en uendelig Rad

f. Ex. $\frac{1}{5} = \frac{1}{3+2}$ her er $c = 1$, $a = 3$, $b = 2$,

altsaa $\frac{1}{3+2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \frac{16}{243}$

man seer let at naar man i denne Rad standser med et bekræftende Led og summerer Raden, da faaer man en Værdi større end den givne Brøk; er derimod det sidste Led nægtende faaer man Vær-

dien

dien mindre end Broken, men Differencen imellem den fundne og sande er stedse mindre, og først naar Raden bliver uendelig vil dens Summa net op udgiøre $\frac{1}{5}$.

En saadan Rad der stedse nærmer sig til den sande Værdi, kaldes en convergerende Rad, som stedse erholdes efter Formen $\frac{c}{a+b}$, naar det første Led i Divisor er større end det andet. $a > b$.

Vilde man derimod efter samme Form sætte $a < b$ og sætte $\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4}$ da vilde vi faae en divergerende Rad, der stedse viger mere af fra den sande Værdie, den anførte Brøk $\frac{1}{5}$ vilde da blive $\frac{1}{1+4} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024$ &c.

Anm. Det indsees let at jo større $a$ er mod $b$ i de anførte Exempler, desto hastigere convergerer Raden, og man kan lade sig nøie med faa Led uden at begaae nogen mærkelig Feil.

## Om Potenser, Rodstørrelser og deres Forandringer.

§. 8.

I Almindelighed forstaaes ved en Potens eller Værdighed (dignitas) et Produkt af ligestore Fak-

Faktorer (Arith. §. 52) og den som Faktor brugte Størrelse kaldes Potensens Rod. Det øverst ved høire Side af Roden satte Tal kaldes Potensens Exponent, og tilkiendegiver hvor mange enkelte Faktorer der ere multiplicerede med hinanden; eller hvad Potens det er, f. Ex. $a^3 = aaa$ er den 3die Potens af $a$ der er Potensens Rod og 3 er Exponenten. $8^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ den tredie Potens af 8 som er Potensens Rod, og i Almindelighed betegner $a^n$ at $a$ skal multipliceres $n$ Gange med sig selv. Enhver Rod tilkiendegives ved det i Arithmetiken (§. 52) ved Qvadratroden anførte Tegn, og ved et Tal eller Bógstav som sættes i Tegnet og kaldes Rod-Exponent tilkiendegives hvad Rod der søges, f. Ex. $\sqrt[6]{64}$ betegner at der søges et Tal som ophøiet til siette Potens er 64 hvilket er 2, thi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ naar den anden Rod skal tilkiendegives, sættes ingen Rod-Exponent (Arith. §. 52). Er Størrelsen for hvilken Rodtegnet sættes sammensat, da indsluttes den i en Parenthes, f. Ex. $\sqrt[4]{(ab + c)}$ betyder at til Produktet $ab$ skal adderes $c$ og af Summen søges den femte Rod, det kunde og skrives saaledes: $\sqrt[4]{ab + c}$. $\sqrt[4]{(a + m + (a + b)\,c)} = \sqrt[4]{(a + m + ac + bc)}$, kan og staae saaledes: $\sqrt[4]{a + m + a + b \times c} = \sqrt[4]{a + m + ac + bc}$.

bien mindre end Brøken, men Differencen imellem den fundne og sande er stedse mindre, og først naar Raden bliver uendelig vil dens Summa net op udgiøre $\frac{1}{5}$.

En saadan Rad der stedse nærmer sig til den sande Værdi, kaldes en convergerende Rad, som stedse erholdes efter Formen $\frac{c}{a+b}$, naar det første Led i Divisor er større end det andet. $a > b$.

Vilde man derimod efter samme Form sætte $a < b$ og sætte $\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4}$ da vilde vi faae en divergerende Rad, der stedse viger mere af fra den sande Værdie, den anførte Brøk $\frac{1}{5}$ vilde da blive $\frac{1}{1+4} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024$ etc.

Anm. Det indsees let at jo større $a$ er mod $b$ i de anførte Exempler, desto hastigere convergerer Raden, og man kan lade sig nøie med faa Led uden at begaae nogen mærkelig Feil.

## Om Potenser, Rodstørrelser og deres Forandringer.

§. 8.

I Almindelighed forstaaes ved en Potens eller Værdighed (dignitas) et Produkt af ligestore

Fak-

Faktorer (Arith. §. 52) og den som Faktor brugte Størrelse kaldes Potensens Rod. Det øverst ved høire Side af Roden satte Tal kaldes Potensens Exponent, og tilkiendegiver hvor mange enkelte Faktorer der ere multiplicerede med hinanden; eller hvad Potens det er, f. Ex. $a^3 = aaa$ er den 3die Potens af $a$ der er Potensens Rod og 3 er Exponenten. $8^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ den tredie Potens af 8 som er Potensens Rod, og i Almindelighed betegner $a^n$ at $a$ skal multipliceres $n$ Gange med sig selv. Enhver Rod tilkiendegives ved det i Arithmetiken (§. 52) ved Qvadratroden anførte Tegn, og ved et Tal eller Bogstav som sættes i Tegnet og kaldes Rod-Exponent tilkiendegives hvad Rod der søges, f. Ex. $\sqrt[6]{64}$ betegner at der søges et Tal som ophøiet til sjette Potens er 64 hvilket er 2, thi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ naar den anden Rod skal tilkiendegives, sættes ingen Rod-Exponent (Arith. §. 52). Er Størrelsen for hvilken Rodtegnet sættes sammensat, da indsluttes den i en Parenthes, f. Ex. $\sqrt[4]{(ab+c)}$ betyder at til Produktet $ab$ skal adderes $c$ og af Summen søges den femte Rod, det kunde og skrives saaledes: $\sqrt[4]{\overline{ab+c.}}$ $\sqrt[4]{(a+m+(a+b)\,c)} = \sqrt[4]{(a+m+ac+bc)}$, kan og staae saaledes: $\sqrt[4]{\overline{a+m+a+b \times c}} = \sqrt[4]{\overline{a+m+ac+bc.}}$

§. 9.

## §. 9.

Addition og Subtraction med Potenser skeer efter samme Regler som i Arithmetiken (§. 41 og 42) ere forklarede; naar de have samme Røder og samme Exponenter ansees de som ligeartede Størrelser, og saavel Additionen som Subtractionen kan virkelig foretages. Ere derimod Rødderne forskiellige, om end Exponenterne ere de samme, eller Exponenterne forskiellige naar Rødderne ere de samme, da ere de uligeartede Størrelser, og de nævnte Regnings-Arter kan allene skee ved Hielp af Tegn.

1 Exemp. $2a^5+4a^5=6a^5$; $7a^2-3a^2=4a^2$.

at addere
$$\begin{cases} a^3-3b^4+5c^6-3g^7 \\ -2a^3+b^4-2c^6+3h^7-3g^6 \end{cases}$$

Summa $=-a^3-2b^4+3c^6-3g^7+3h^7-3g^6$

2 Exempel.

at subtrahere
$$\begin{cases} 4x^2-y^5+z^4-u^2 \\ 2x^2-y^5-z^4+u^3 \\ - \quad + \quad + \quad - \end{cases}$$

Differencen $2x^2-2y^5+9z^4-5u^2-4u^3$

## §. 10.

Potenser af samme Rod multipliceres med hinanden naar deres Exponenter adderes;

Pro-

Produktet bliver saaledes en Potens, hvis Exponent er Summen af Factorernes Exponenter.

Beviis: $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa$ (Arithm. §. 44) $a^5 = a^{3+2}$.

Anm. Ere Potenserne af forskiellige Røder, kan Multiplicationen allene tilkiendegives ved Tegn eller efter Vedtægt at skrive dem umiddelbar ved hinanden, f. Ex. $a^3 \times b^2 = a^3 b^2$.

Exempel paa Multiplication med sammensatte Størrelser:

$$
\begin{array}{l}
2a^2 + 3b^3 \\
2a^2 + 3b^3 \\
\hline
4\;\;^4 + 6a^2b^3 \\
\qquad\quad 6a^2b^3 + 9b^6 \\
\hline
4a^4 + 12a^2b^3 + 9b^6
\end{array}
$$

(conf. Ar. §. 44 No. 2)

$$
\begin{array}{r}
x^2 - y^3 + 4y^5 \\
-3y^2 \\
\hline
-3y^2x^2 + 3y^5 - 12y^7
\end{array}
$$

## §. 11.

Division med Potenser af samme Rod skeer, naar Divisors Exponent subtraheres fra Dividendi Exponent; da Forskiellen er Qvotientens Exponent. Ex. $a^5 : a^3 = a^2$.

Be-

Beviis: $a^5 = aaaaa$; $a^3 = aaa$, altsaa $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$ (Arithm. §. 45).

Ere Potensernes Rødder forskiellige, da tilkiendegives Divisionen allene ved Tegn

Ex. $a^5 : b^2 = \frac{a^5}{b^2}$.

Naar dette iagttages skeer Divisionen med sammensatte Størrelser, der indeholde flere Potenser saavel af samme som af forskiellig Rod, ligesom om Bogstaver er forklaret (Arithm. §. 46).

Divisor Dividenden Qvotienten

$$
\begin{array}{lll}
2a^3+3b^5) & 4a^6+12a^3b^5+9b^{10}+2a^3c^4+3b^5c^4 & (+2a^3+3b^5+c^4 \\
 & 4a^6+6a^3b^5 & \\
\hline
 & 6a^3b^5+9b^{10} & \\
 & 6a^3b^5+9b^{10} & \\
\hline
 & 2a^3c^4+3b^5c^4 & \\
 & 2a^3c^4+3b^5c^4 &
\end{array}
$$

Tillæg 1) Skal nu $a^3$ divideres med $a^2$ bliver Qvotienten $a^1$ som er det samme som $a$, thi $a^3 = aaa$ og $a^2 = aa$, altsaa $\frac{a^3}{a^2} = a^1$, det samme som $\frac{aaa}{aa} = a$. Enhver Størrelse er altsaa den første Potens af sig selv, og Exponenten behøves ikke at skrives.

Til-

Tillæg 2) Have Dividenden og Divisor samme Exponenter, bliver Qvotientens Exponent 0, f. Ex. $a^3 : a^3 = a^0$, hvilket Udtryk (man sætte i Stæden for $a$ hvad Størrelse man vil) er lige med 1, thi $\frac{a^3}{a^3} = \frac{aaa}{aaa} = 1$ (Arithm. §. 45) saaledes er $x^0 = 1$; $100^0 = 1$.

Tillæg 3) Er Divisors Exponent større end Dividendens, da bliver Qvotientens Exponent nægtende (negativ), f. Ex. $a^3 : a^5 = a^{-2}$; $x^3 : x^4 = x^{-1}$. Enhver saadan Potens med en negativ Exponent er ligegieldende med en Brøk, hvis Tæller er 1 og hvis Nævner er samme Potens med en positiv Exponent. Thi $x^3 : x^5 = x^{-2}$ men $x^3 : x^5$ er $= \frac{xxx}{xxxxx} = \frac{1}{x^2}$, og saaledes $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (Arithm. §. 38. 4), og i Almindelighed $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$. Ligeledes $mn^{-2} = m \times \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n^2}$.

Anm. Det er af megen Vigtighed at øve Begyndere vel i disse Sætninger; da det i algebraiske Regninger ofte er nødvendigt at sætte et saadant Udtryk i Stæden for et andet.

§. 12.

§. 12.

En given Potens ophøies til en bestemt høiere Grad, naar dens Exponent multipliceres med Exponenten af den forlangte Grad. F. Ex. $(a^3)^4 = a^{12}$; $(2^3)^2 = 2^6$.

Beviis: $(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3}$ (§. 10) $= a^{3 \times 4} = a^{12}$, saaledes $(x^m)^n = x^{mn}$. $(x^{-4})^3 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$ (§. 11).

§. 13.

En forlangt Potens af et givet Product findes ved at ophøie hver enkelt Faktor til den forlangte Potens, og multiplicere dem med hinanden; ligeledes findes Potensen af en Qvotient ved at ophøie Dividenden og Divisor hver for sig til den forlangte Potens.

Ex. $(ab)^3 = a^3b^3$; $(xy)^m = x^my^m$. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$.

Beviis: $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaabbb = a^3b^3$. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Anm. Skal en Samling af flere Størrelser forenede med + eller — (ved Addition eller Subtraction) ophøies til en Potens, saa indslutter man dem

dem i en Parenthese, eller slaaer en Linie over den hele Række, og sætter bag Parenthesen eller efter Linien Exponenten til den forlangte Potens, Ex. $(a+b+c)^2$ eller $\overline{a+b+c}^2$ betyder at Summen af $a$, $b$ og $c$ skal ophøies til 2den Potents og er ikke $a^2+b^2+c^2$, men $a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$ Arith. §. 55. 2 T.) $((a+b)^2+(c+b)^3)^4$ betyder 1) at $a+b$ skal qvadreres, 2) at $c+b$ skal kuberes, og at Summen af dette Qvadrat og denne Kubus skal ophøies til fierde Potens.

## §. 14.

En forlangt Rod udtrækkes af en given Potens; naar Potensens Exponent divideres med Rod-Exponenten. Ex. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

Beviis: At uddrage den 3die Rod af $a$ i siette Potens, er at finde en Størrelse som multipliceret 3 Gange med sig selv frembringer $a$ i siette Potens, nu gives der ingen anden Størrelse end $a^2$ som ophøiet til 3 Potens, kan frembringe $a^6$ thi $(a^2)^3$ er $= a^6$ og i Almindelighed er $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

thi $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n$ er $= x^{\frac{nm}{n}} = x^m$

eller saaledes (§. 12.) $x = x^1 = x^{\frac{m}{m}} =$ $x^{\frac{1}{m} \times m} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m$ saaledes er $nm$

$x$ opløst i $m$ ligestore Factorer, hvoraf enhver er $= x^{\frac{1}{m}}$ som vi vil sætte $= y$, saa at $x = y \times y \times y$ ꝛc. Følgelig $\sqrt[m]{x} = y = x^{\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{x^2} = y \times y = x^{\frac{2}{m}}$ og i Almindelighed $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Da $m$ og $n$ kan tillægges alle mulige Værdier, saa følger at $m$ kan antages større end $n$ eller ikke at kunde gaae op i $n$; man faaer saaledes Potenser med Brøk-Exponenter, som ogsaa kaldes Brøk-Potenser. F. Ex. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ogsaa er $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^2$. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Arith. §. 44. Anm. og §. 52. 2 Till.). Alle Rodstørrelser kan altsaa udtrykkes som Brøk-Potenser, og denne Maade at betegne dem paa, bruges meget ofte. Imidlertid beholder man i mange Tilfælde hellere Rodtegnet, som ogsaa kort og tydelig viser hvad en Brøk-Potens egentlig betyder: nemlig at man af et Tal, ophøiet til en Potens, hvis Exponent er Brøkens Tæller, skal uddrage en Rod, hvis Exponent er Nævneren. F. Ex. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Tillæg 1) Heraf lader sig udlede mange Forandringer i de algebraiske Udtryk, som best sees ved Exempler, saaledes er: $a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \times a^{\frac{1}{2}} = a^2 \times \sqrt{a}$; $a^{\frac{10}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \times a^{\frac{1}{3}} = a^3 \times \sqrt[3]{a}$; $a^{\frac{15}{4}} = a^{3\frac{3}{4}} = a^3 \sqrt[4]{a^3}$. Lige-

Ligesaa $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ sæt $a = 4$ saa er $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

videre er $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a\sqrt[4]{a}$ thi $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a^2 \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{1\frac{1}{4}} = a \times a^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{a}$.

Tillæg 2) En Rodstørrelse bliver uforandret i sin Værdie, naar begge Exponenter (Potensens og Rodtegnets) multipliceres eller divideres med et og samme Tal. Thi da $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n \times r}{m \times r}}$. (Arithm. §. 30. 4.) saa er $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \times r]{a^{n \times r}}$, og $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m : r]{a^{n : r}}$.

Tillæg 3) I Følge heraf lader en Rodstørrelse sig bringe til en ringere Grad, naar begge Exponenterne (nemlig den i Rodtegnet og under Rodtegnet) have en fælles Divisor f. Ex. $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[6:2]{a^{8:2}} = \sqrt[3]{a^4}$. Et Tal-Exempel $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{8^2} = \sqrt[2]{8}$.

§. 15.

To eller flere forskiellige Rodstørrelser bringes under eens Benævning (ɔ: forandres

 saa

saaledes at de alle faae samme Rod-Exponent, eller at samme Rod skal uddrages af dem alle) 1) naar enhver Rod-Exponent multipliceres med Produktet af de øvrige Rod-Exponenter, og 2) enhver Potens-Exponent under Rodtegnet multipliceres med de samme Tal eller Bogstaver hvormed Rod-Exponenten er multipliceret.

F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[s]{y^r}$ man faaer da $\sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[ms]{x^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$ (§. 14.) Ligeledes være givne $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{y^q}$, og $\sqrt[s]{z^r}$, saa er $\sqrt[mps]{x^{nps}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[mps]{y^{mps}} = \sqrt[p]{y^q}$ ligeledes $\sqrt[mps]{z^{mpr}}$ $\sqrt[s]{z^r}$.

Rigtigheden i denne Fremgangsmaade indsees af §. 13. Till. 2.

Tillæg. Det samme skeer, ved at udtrykke Rodstørrelserne som Potenser med Brøk-Exponenter, bringe disse til eens Benævning (Arithm. §. 32.) og sætte derpaa den for dem alle fælles Nævner i Rodtegnet for dem alle. F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$; $\sqrt[s]{y^r}$ saa er $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$ Brøkene $\frac{m}{n}$ og $\frac{s}{r}$ bragte til eens Benævning blive $\frac{ns}{ms}$ og $\frac{mr}{ms}$. Saaledes $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{ns}{ms}}$

og

og $y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{mr}{ms}}$ udtrykkes nu disse Brøk-Exponenter ved Rodtegnet, saa er $x^{\frac{ns}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$; og $y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[ms]{y^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$.

§. 16.

En forlangt Rod uddrages af et givet Produkt, ved at uddrage denne Rod af enhver Faktor og multiplicere disse Roder med hinanden, da dette Produkt er Roden af det givne Produkt; ligeledes af en given Qvotient (Brøk) ved at uddrage den forlangte Rod af Dividenden og Divisor, og tage disses Qvotient.

Ex. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$. $\sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x} \times \sqrt[m]{y}$. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$. $\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$.

Beviis. $\sqrt[3]{ab}$ maa være $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ efterdi $(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3$ er $= ab$ (§. 12.) og $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, da $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n$ er $= \frac{x}{y}$.

Til-

Tillæg 1) En Rodstørrelse udtrykkes kortere, naar Størrelsen under Rodtegnet har en eller flere Faktorer (eller og kan opløses i saadanne Faktorer) der have samme Exponent som Rodtegnet, da disse bringes foran Rodtegnet som Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{a^n b^m} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a\sqrt[n]{b^m}$. $\sqrt[m]{a^m b^m c^n} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} \times \sqrt[m]{c^n} = a \times b \times \sqrt[m]{c^n} = ab\sqrt[m]{c^n}$. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. $\sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.

Tillæg 3) Bliver efter denne Forandring under samme Rodtegn samme Størrelse tilbage med forskiellige Coefficienter, saa forholde de irrationale Rodstørrelser sig om deres rationale Coefficienter.

F. Ex $\sqrt{4 \times 11} : \sqrt{9 \times 11} = 2\sqrt{11} : 3\sqrt{11} = 2 : 3$. $\sqrt[n]{x^n y} : \sqrt[n]{z^n y} = x\sqrt[n]{y} : z\sqrt[n]{y} = x : z$.

Anm. En algebraisk rational Størrelse kaldes den, som kan tilkiendegives og betegnes uden Rodtegn eller ved en Exponent, som er en egentlig Brøk; irrational derimod, naar den ikke uden paa en af de nævnte Maader kan udtrykkes og dens Værdie følgelig ikke nøie angives. (Arithm. §. 54. Tillæg 1.)

Til

Tillæg 3) Coefficienten ved en Rodstørrelse lader sig bringe under Rodtegnet; naar den ophøies til en Potens, der har samme Exponent som Rodtegnet. Ex. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \times 7} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{63}$. $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \times b^m} = \sqrt{a^n b^m}$.

§. 17.

Rodstørrelser adderes og subtraheres, naar de, efter at være forkortede saavidt muligt (§. 16. Till. 1.), have samme Rod-Exponent og samme Størrelse under Rodtegnet, og følgelig kan ansees som Ting af eens Art; ved at addere og subtrahere deres Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{x^n c} \pm \sqrt[n]{y^n c} = x\sqrt[n]{c} \pm y\sqrt[n]{c} = (x \pm y)\sqrt[n]{c}$. $3\sqrt{8} + \sqrt{4^2 \times 8} = 3\sqrt{8} + 4\sqrt{8} = 7\sqrt{8}$.

Till. Ere derimod Størrelser under Rodtegnene eller Rod Exponenterne forskiellige, da tilkiendegives Additionen og Subtractionen allene ved Tegn, som i følgende Exempler.

Ex. at addere.

$$\sqrt{4a^2b}+\sqrt{9a^2bc}+\sqrt{4x} = 2a\sqrt{b}+3a\sqrt{bc}+2\sqrt{x}$$ (§. 16. Till.)

$$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{a^2bc}-\sqrt{16x} = 4a\sqrt{b}-a\sqrt{bc}-4\sqrt{x}$$

Summen $= 6a\sqrt{b}+2b\sqrt{bc}-2\sqrt{x}$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{a}+m\sqrt{n}$ | $2\sqrt{7}-4\sqrt{4}$ |
| $-\sqrt{b}+m\sqrt{g}$ | $3\sqrt{7}-5\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{a}-\sqrt{b}+m\sqrt{n}+m\sqrt{g}$ | $5\sqrt{7}-4\sqrt{4}-5\sqrt{2}.$ |

at subtrahere.

$$5a\sqrt{bg}-3c\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[4]{b}$$
$$-8a\sqrt{bg}\pm7c\sqrt[3]{b^2}\pm5\sqrt[4]{b}$$
$$+\qquad\mp\qquad\mp$$
$$13a\sqrt{bg}-10c\sqrt[3]{b^2}-3\sqrt[4]{u}$$

| | |
|---|---|
| $4\sqrt{ab}+2\sqrt[3]{a}$ | $3\sqrt{5}+3\sqrt{6}$ |
| $6\sqrt{ab}\pm3\sqrt{a}$ | $9\sqrt{5}-4\sqrt{4}$ |
| $-\qquad\mp$ | $-\qquad+$ |
| $-2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}-3\sqrt{a}$ | $-6\sqrt{5}+3\sqrt{6}+4\sqrt{4}.$ |

## §. 18.

Rodstørrelser, der enten have, eller ere bragte til at have (§. 15.) eens Benævning ɔ: samme Rod-Exponenter, multipliceres og divideres med hinanden, naar 1) Størrelserne under Rodtegnet multipliceres og divideres med hinanden, og foran det udkomne Produkt eller Qvotient sættes Rodtegnet med den fælles Exponent; og 2) Coefficienterne (om der ere saadanne) multipliceres og divideres med hinanden og Produktet eller Qvotienten hensættes foran Rodtegnet.

Ex. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$. $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$

$\sqrt[m]{x^p} \times \sqrt[m]{y^q} = \sqrt[m]{x^p y^q}$. $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[s]{b^r} =$

$\sqrt[ms]{a^{ns}} \times \sqrt[ms]{b^{mr}}$ (§. 15.) $= \sqrt[ms]{a^{ns} b^{mr}}$. Ligeledes

$\sqrt[m]{a} : \sqrt[s]{b} = \sqrt[ms]{a} : \sqrt[ms]{b} = \sqrt[ms]{\frac{a}{b}}$.

$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}$; og $2\sqrt{5} : 3\sqrt{7}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$. $c\sqrt[m]{x^p} \times d\sqrt[m]{y^q} = cd\sqrt[m]{x^p y^q}$.

$x\sqrt[m]{a^n} : y\sqrt[s]{b^r} = x\sqrt[ms]{a^{ns}} : y\sqrt[ms]{b^{mr}} =$

$\frac{x}{y}\sqrt[ms]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}$.

Anm. 1. I Henseende til Tegnene gielde de i Arithmetiken forklarede Regler; og Regningen med

$x$ opløst i $m$ ligestore Factorer, hvoraf enhver er $= x^{\frac{1}{m}}$ som vi vil sætte $= y$, saa at $x = y \times y \times y$ rc. Følgelig $\sqrt[m]{x} = y = x^{\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{x^2} = y \times y = x^{\frac{2}{m}}$ og i Almindelighed $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Da $m$ og $n$ kan tillægges alle muelige Værdier, saa følger at $m$ kan antages større end $n$ eller ikke at kunde gaae op i $n$; man faaer saaledes Potenser med Brøk-Exponenter, som ogsaa kaldes Brøk-Potenser. F. Ex. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ogsaa er $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^2$. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Arith. §. 44. Anm. og §. 52. 2 Till.). Alle Rodstørrelser kan altsaa udtrykkes som Brøk-Potenser, og denne Maade at betegne dem paa, bruges meget ofte. Imidlertid beholder man i mange Tilfælde hellere Rodtegnet, som ogsaa kort og tydelig viser hvad en Brøk-Potens egentlig betyder: nemlig at man af af et Tal, opløiet til en Potens, hvis Exponent er Brøkens Tæller, skal uddrage en Rod, hvis Exponent er Nævneren. F. Ex. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Tillæg 1) Heraf lader sig udlede mange Forandringer i de algebraiske Udtryk, som best sees ved Exempler, saaledes er: $a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \times a^{\frac{1}{2}} = a^2 \times \sqrt{a}$; $a^{\frac{10}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \times a^{\frac{1}{3}} = a^3 \times \sqrt[3]{a}$; $a^{\frac{15}{4}} = a^{3\frac{3}{4}} = a^3 \sqrt[4]{a^3}$.

Lige-

Ligesaa $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

sæt $a = 4$ saa er $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

videre er $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a\sqrt[4]{a}$ thi $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a^2 \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{1\frac{1}{4}} = a \times a^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{a}$.

Tillæg 2) En Rodstørrelse bliver uforandret i sin Værdie, naar begge Exponenter (Potensens og Rodtegnets) multipliceres eller divideres med et og samme Tal. Thi da $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n \times r}{m \times r}}$ (Arithm. §. 30. 4.) saa er $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \times r]{a^{n \times r}}$, og $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:r]{a^{n:r}}$.

Tillæg 3) I Følge heraf lader en Rodstørrelse sig bringe til en ringere Grad, naar begge Exponenterne (nemlig den i Rodtegnet og under Rodtegnet) have en fælles Divisor f. Ex. $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[6:2]{a^{8:2}} = \sqrt[3]{a^4}$. Et Tal-Exempel $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{8^2} = \sqrt[2]{8}$.

§. 15.

To eller flere forskiellige Rodstørrelser bringes under eens Benævning (ɔ: forandres

saaledes at de alle faae samme Rod-Exponent, eller at samme Rod skal uddrages af dem alle) 1) naar enhver Rod-Exponent multipliceres med Produktet af de øvrige Rod-Exponenter, og 2) enhver Potens-Exponent under Rodtegnet multipliceres med de samme Tal eller Bogstaver hvormed Rod-Exponenten er multipliceret.

F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[s]{y^r}$ man faaer da $\sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[ms]{x^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$ (§. 14.) Ligeledes være givne $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{y^q}$, og $\sqrt[s]{z^r}$, saa er $\sqrt[mps]{x^{nps}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[mps]{y^{mps}} = \sqrt[p]{y^q}$ ligeledes $\sqrt[mps]{z^{mpr}}$ $\sqrt[s]{z^r}$.

Rigtigheden i denne Fremgangsmaade indsees af §. 13. Till. 2.

Tillæg. Det samme skeer, ved at udtrykke Rodstørrelserne som Potenser med Brøk-Exponenter, bringe disse til eens Benævning (Arithm. §. 32.) og sætte derpaa den for dem alle fælles Nævner i Rodtegnet for dem alle. F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$; $\sqrt[s]{y^r}$ saa er $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$ Brøkene $\frac{m}{n}$ og $\frac{s}{r}$ bragte til eens Benævning blive $\frac{ns}{ms}$ og $\frac{mr}{ms}$. Saaledes $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{ns}{ms}}$

og

og $y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{mr}{ms}}$ udtrykkes nu disse Brøk-Exponenter ved Rodtegnet, saa er $x^{\frac{ns}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$; og $y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[ms]{}^{mr} = \sqrt[s]{y^r}$.

§. 16.

En forlangt Rod uddrages af et givet Produkt, ved at uddrage denne Rod af enhver Faktor og multiplicere disse Røder med hinanden, da dette Produkt er Roden af det givne Produkt; ligeledes af en given Qvotient (Brøk) ved at uddrage den forlangte Rod af Dividenden og Divisor, og tage disses Qvotient.

Ex. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$. $\sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x} \times \sqrt[m]{y}$. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$. $\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$.

Beviis. $\sqrt[3]{ab}$ maa være $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ efterdi $(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3$ er $= ab$ (§. 12.) og $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ da $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n$ er $= \frac{x}{y}$.

Til-

Tillæg 1) En Rodstørrelse udtrykkes kortere, naar Størrelsen under Rodtegnet har en eller flere Faktorer (eller og kan opløses i saadanne Faktorer) der have samme Exponent som Rodtegnet, da disse bringes foran Rodtegnet som Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{a^n b^m} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a\sqrt[n]{b^m}$. $\sqrt[m]{a^m b^m c^n} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} \times \sqrt[m]{c^n} = a \times b \times \sqrt[m]{c^n} = ab\sqrt[m]{c^n}$. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. $\sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.

Tillæg 3) Bliver efter denne Forandring under samme Rodtegn samme Størrelse tilbage med forskiellige Coefficienter, saa forholde de irrationale Rodstørrelser sig om deres rationale Coefficienter.

F. Ex $\sqrt{4 \times 11} : \sqrt{9 \times 11} = 2\sqrt{11} : 3\sqrt{11} = 2 : 3$. $\sqrt[n]{x^n y} : \sqrt[n]{z^n y} = x\sqrt[n]{y} : z\sqrt[n]{y} = x : z$.

Anm. En algebraisk rational Størrelse kaldes den, som kan tilkiendegives og betegnes uden Rodtegn eller ved en Exponent, som er en egentlig Brøk; irrational derimod, naar den ikke uden paa en af de nævnte Maader kan udtrykkes og dens Værdie følgelig ikke nøie angives. (Arithm. §. 54. Tillæg 1.)

Tillæg 3) Coefficienten ved en Rodstørrelse lader sig bringe under Rodtegnet; naar den ophøies til en Potens, der har samme Exponent som Rodtegnet. Ex. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \times 7} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{63}$. $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \times b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m}$.

§. 17.

Rodstørrelser adderes og subtraheres, naar de, efter at være forkortede saavidt muligt (§. 16. Till. 1.), have samme Rod-Exponent og samme Størrelse under Rodtegnet, og følgelig kan ansees som Ting af eens Art; ved at addere og subtrahere deres Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{x^{n}c} \pm \sqrt[n]{y^{n}c} = x\sqrt[n]{c} \pm y\sqrt[n]{c} = (x \pm y)\sqrt[n]{c}$. $3\sqrt{8} + \sqrt{4^2 \times 8} = 3\sqrt{8} + 4\sqrt{8} = 7\sqrt{8}$.

Till. Ere derimod Størrelser under Rodtegnene eller Rod Exponenterne forskiellige, da tilkiendegives Additionen og Subtractionen allene ved Tegn, som i følgende Exempler.

**Ex. at addere.**

$$\sqrt{4a^2b} + \sqrt{9a^2bc} + \sqrt{4x} = 2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{bc} + 2\sqrt{x} \text{ (§. 16. Till.)}$$

$$\sqrt{16a^2b} - \sqrt{a^2bc} - \sqrt{16x} = 4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc} - 4\sqrt{x}$$

$$\text{Summen} = 6a\sqrt{b} + 2b\sqrt{bc} - 2\sqrt{x}$$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{a} + m\sqrt{n}$ | $2\sqrt{7} - 4\sqrt{4}$ |
| $-\sqrt{b} + m\sqrt{g}$ | $3\sqrt{7} - 5\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{a} - \sqrt{b} + m\sqrt{n} + m\sqrt{g}$ | $5\sqrt{7} - 4\sqrt{4} - 5\sqrt{2}.$ |

**at subtrahere.**

$$5a\sqrt{bg} - 3c\sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[4]{b}$$

$$\begin{array}{l} -8a\sqrt{bg} \pm 7c\sqrt[3]{b^2} \pm 5\sqrt[4]{b} \\ + \end{array}$$

$$13a\sqrt{bg} - 10c\sqrt[3]{b^2} - 3\sqrt[4]{u}$$

| | |
|---|---|
| $4\sqrt{ab} + 2\sqrt{a}$ | $3\sqrt{5} + 3\sqrt{6}$ |
| $\begin{array}{l} 6\sqrt{ab} \pm 3\sqrt{a} \\ = \end{array}$ | $\begin{array}{l} 9\sqrt{5} - 4\sqrt{4} \\ - \quad + \end{array}$ |
| $-2\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$ | $-6\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{4}.$ |

## §. 18.

Rodstørrelser, der enten have, eller ere bragte til at have (§. 15.) eens Benævning ɔ: samme Rod-Exponenter, multipliceres og divideres med hinanden, naar 1) Størrelserne under Rodtegnet multipliceres og divideres med hinanden, og foran det udkomne Produkt eller Qvotient sættes Rodtegnet med den fælles Exponent; og 2) Coefficienterne (om der ere saadanne) multipliceres og divideres med hinanden og Produktet eller Qvotienten hensættes foran Rodtegnet.

Ex. $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{35}$. $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$

$\sqrt[m]{x^p}\times\sqrt[m]{y^q}=\sqrt[m]{x^py^q}$. $\sqrt[m]{a^n}\times\sqrt[s]{b^r}=$ $\sqrt[ms]{a^{ns}}\times\sqrt[ms]{b^{mr}}$ (§. 15.) $=\sqrt[ms]{a^{ns}b^{mr}}$. Ligeledes $\sqrt[m]{a}:\sqrt[s]{b}=\sqrt[ms]{a}:\sqrt[ms]{b}=\sqrt[ms]{\frac{a}{b}}$.

$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{7}=6\sqrt{35}$; og $2\sqrt{5}:3\sqrt{7}$ $=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$. $c\sqrt[m]{x^p}\times d\sqrt[m]{y^q}=cd\sqrt[m]{x^py^q}$.

$x\sqrt[m]{a^n}:y\sqrt[s]{b^r}=x\sqrt[ms]{a^{ns}}:y\sqrt[ms]{b^{mr}}=$ $\frac{x}{y}\sqrt[ms]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}$.

Anm. 1. I Henseende til Tegnene gielde de i Arithmetiken forklarede Regler; og Regningen med sam-

sammensatte Rodstørrelser er kun Anvendelsen af de tilforn for de enkelte fremsatte Regler.

F. Ex.

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{a} + \sqrt{b} \\ 2\sqrt{a} - \sqrt{b} \\ \hline 4\sqrt{aa} + 2\sqrt{ab} \\ \quad\quad - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b^2} \\ \hline 4\sqrt{aa} - \sqrt{b^2} = 4a - b. \end{array}$$

$$(4-\sqrt{3}) \times (3-\sqrt{2}) = 12 - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{6} = 12 - \sqrt{32} - \sqrt{27} + \sqrt{6}.$$

Anm. 2. I Henseende til Rodstørrelsers Division skrives best Divisor og Dividendus, naar de ere bragte til eens Benævning i Form af en Brøk. En Rodstørrelse kan da bortskaffes af Nævnerne, naar Tæller og Nævner multipliceres med samme, men med modsat Tegn.

Ex. 1) $10 : \sqrt{a}-\sqrt{x} = \dfrac{10}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} =$

$$\frac{10\sqrt{a}+10\sqrt{x}}{(\sqrt{a}-\sqrt{x})\times(\sqrt{a}+\sqrt{x})} = \frac{10\sqrt{a}+10\sqrt{x}}{a+x}.$$

2) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} : \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} :$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5}).(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}).(1-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{25}}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Till. 1. $(\sqrt{a})^3$ er $= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ (§. 7.) $= \sqrt{a^3}$ (§. 17.), følgelig $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$.

Till. 2. $\sqrt[3]{(\sqrt{a})} = \sqrt[3\times 2]{a} = \sqrt[6]{a}$; thi $(\sqrt[3\times 2]{a})^3$ er $= \sqrt[3\times 2]{a^3}$ (Till. 1.) $= \sqrt{a}$ (§. 14), eller almindelig $\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a})} = \sqrt[mr]{a}$, da $(\sqrt[mr]{a})^m = \sqrt[mr]{a^m} = \sqrt[r]{a}$.

Till. 3. Lader Exponenten til en given Rodstørrelse sig opløse i Faktorer, saa lader den givne Rodstørrelse sig dele i ligesaamange enkelte. F. Ex. $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3\times 2]{a} = \sqrt[3]{(\sqrt{a})}$. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2]{(\sqrt[3]{8})} = \sqrt{2}$. $\sqrt[6]{a} = \sqrt[2\times 2\times 2]{a} = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{a})})}$.

## §. 19.

**Alle Potenser af en bekræftende Rod ere bekræftende; men af en nægtende Rod ere alle de, hvis Exponenter ere lige Tal, bekræftende, men de, hvis Exponenter ere ulige Tal, benægtende.**

Beviis. Qvadratet (anden Potens) af $\pm a$ er $+ a^2$ (Arith. §. 43 og 52). Nu er i Almindelighed $a^{2n} = (a^2)^n$ (§. 16), følgelig $(\pm a)^{2n} = (+a^2)^n$ et Produkt af lutter bekræftende Faktorer og følgelig bekræftende.

Fremdeles er $a^{2n+1} = a^{2n} \times a$, følgelig $(+a)^{2n+1} = +a^{2n} \times +a$, altsaa be-

kræf-

kræftende; men $(-a)^{2n+1} = +a^{2n} \times -a$, altsaa nægtende.

Anm. $n$ antages at betyde ethvert heelt Tal, følgelig $2n$ ethvert lige og $2n+1$ ethvert ulige Tal.

Till 1. Enhver Rod, hvis Exponent er et ulige Tal (ulige Rod) af en bekræftende Størrelse, kan allene være bekræftende, og af en nægtende Størrelse allene nægtende; saaledes er $\sqrt[3]{+27} = +3$ og $\sqrt[3]{-27} = -3$, men ikke $\sqrt[3]{+27} = -3$; thi $(-3)^3 = -27$.

Till. 1. Enhver lige Rod (hvis Exponent er et lige Tal) af en bekræftende Størrelse kan være baade bekræftende og nægtende, men af en nægtende Størrelse ingen af Delene.

Till. 3. En lige Rod af en nægtende Størrelse, som almindelig betegnes ved $\sqrt[2n]{-a}$, kaldes en umuelig eller indbildt Størrelse (quantitas impossibilis seu imaginaria) i Modsætning af en muelig eller virkelig Størrelse (possibilis seu realis).

Anm De i dette Affnit om Potenser og Rodstørrelser fremsatte Sætninger tiene egentlig til at forkorte Slutningerne i det analytiske Foredrag; da det kan ansees som et Algebraisterne egent hemmeligt Sprog, udfordres der nogen Øvelse deri, naar man uden Anstød vil læse mathematiske Skrifter. Har man denne Færdighed, vil man af det Foregaaende

let indsee Grunden til Ligheden imellem følgende Udtrykke:

$$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[10]{x^9};\ x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[2m]{x^{m+2n}};$$

$$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{y};\ \sqrt{y} : \sqrt[3]{y^{-2}} = y\sqrt[6]{y};$$

$$(2-\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{1}{26}.$$

## Anvendelsen af Læren om Potentenser paa Decimalbrøk. (Arithm. §. 47.)

### §. 20.

Af Decimalbrøks Natur følger, at Udtrykke som disse: $\frac{a}{10^n}$, $\frac{b}{10^m}$, kan betegne enhver Decimalbrøk, naar $a$ og $b$ betyde de virkelige Zifre, hvoraf Brøken bestaaer, ansete som hele Tal eller Brøkens Tæller; og $n$ og $m$ maa være saa store som Antallet af Decimalstederne i Brøken naar den skrives efter Arithm. §. 47.

Da nu $\frac{a}{10^n} = a \times \frac{1}{10^m} = a \times 10^{-n}$

og $\frac{b}{10^m} = b \times 10_{-m}$, saa kan og enhver Decimalbrøk ansees som et heelt Tal multigliceret med en Potents af 10 med en negativ Exponent.

Nu er $(a \times 10^{-n}) \times (b \times 10^{-m}) =$

$ab \times 10^{-(m+n)} = \frac{ab}{10^{n+m}}$, som just er den

(Arithm.

(Arith. §. 50) for Multiplicationen med Decimalbrøk givne Regel, naar det betænkes, at saamange Decimalsteder afskieres i Produktet som $m+n$ angiver; hvilken Exponent er Summen af Faktorernes Exponenter, og altsaa Summen af deres Decimalsteder.

Fremdeles er $(a \times 10^{-n}) : (b \times 10^{-m}) = \frac{a}{b} \times \frac{10^{-n}}{10^{-m}} = \frac{a}{b} \times 10^{-n+m}$. Man antage nu $\frac{a}{b} = q$, saa er $\frac{a}{b} \times 10^{-n+m} = q \times 10^{-(n-m)} = q \times \frac{1}{10^{n-m}} = \frac{q}{10^{n-m}}$; det er: man dividerer de rirkelige Zifre eller Tællerne som betegnedes ved $a$ og $b$; men i Qvotienten $q$ rykkes Decimaltegnet saa mange Zifre mod venstre som Tallet $n-m$ angiver, d. e. saa mange som der ere flere Decimaler i Dividenden end i Divisor. I det Tilfælde at $m$ var $< n$, og altsaa $n-m$ en nægtende Mængde, da maa Decimaltegnet rykkes saa mange Zifre mod høire, d. e. der maa føies Nuller til. See Arith. §. 51.

Anm. Hvad der om de saakaldte tredsindstyvende Deels Brøk (fractiones sexagenales) o: Brøk, hvis Nævner er 60 eller en Potens af 60, kunde være at sige, har jeg med Flid forbigaaet, da deres Anvendelse er saa saare sielden, og det desuden let kan forstaaes af det som om Decimalbrøk er sagt.

# Om Æqvationer (Ligninger) og deres Opløsning.

---

## I. Om Ligninger i Almindelighed.

§. 21.

To forskiellige Udtryk for een og samme Størrelse forbundne med Ligheds-Tegn kaldes en Ligning. F. Ex. 1 Rdlr. = 6 Mk. 8 = 5 + 3. Størrelserne kan være udtrykt ved Tal eller Bogstaver; disse kan betegne bekiendte eller ubekiendte Størrelser. Efter almindelig Vedtægt bruges de første smaa Bogstaver af det latinske Alphabet til at betegne de givne eller bekiendte Størrelser (naar man ikke vil udtrykke dem ved Tal), og de sidste Bogstaver af samme Alphabet, $x$, $y$, $z$ o. s. v. til at betegne de søgte eller ubekiendte Størrelser. Ex. $a + c = x - d$ vil sige, at der søges en Størrelse $x$ som er af den Beskaffenhed, at naar en bekiendt Størrelse $d$ fradrages, bliver det Tilbageblevne liig Summen af to bekiendte Størrelser $a$ og $c$; med Tal $8 + 5 = x - 3$. De to lige store Udtrykke kaldes Æqvationens Sider (membra), og de forskiellige med + eller — forbundne Tal eller Bogstaver paa hver Side kaldes Æqvationens Leed (termini); saaledes ere i det anførte Exempel to

Leed

Leed paa hver Side, derimod i dette Exempel $\frac{ba}{c} = x$ er kun eet Leed paa hver Side, da $\frac{ab}{c}$ kun er een algebraisk Størrelse.

Anm. 1. Algebra (i en indskrænket Bemærkelse) er den Deel af de analytiske Videnskaber, som lærer af givne Betingelser at finde ubekiendte søgte Størrelser ved Hielp af Ligninger. Navnet Algebra er af arabisk Oprindelse, enten om efter en Mand Geber, der har dyrket denne Videnskab, eller efter et arabisk Ord, der efter Golius skal betyde reductionem partium ad totum. (Delenes Reduction til et Heelt.)

Anm. 2. De Ligninger, som her især handles om, og som almindelig forstaaes naar man taler om Ligninger (maaskee man kunde kalde dem egentlige Ligninger), ere de, hvori der forekomme een eller flere ubekiendte Størrelser, da de andre, hvori Alt er bekiendt, saa at sige opløse sig selv, og dertil ingen videre Forklaring behøves.

§. 22.

At opløse en saadan Ligning er at forandre den saaledes, at man derved finder Værdien af den ubekiendte Størrelse, dette opnaaes naar denne bringes allene paa den ene Side af Liigheds-Tegnet, og paa den anden Side findes lutter bekiendte.

Den hele Fremgangsmaade ved Opløsningen grunder sig allene paa de i Arithmetiken §. 38. fremsatte almindelige Grundsætninger, hvis Anven-

Opløsning forekommende Tilfælde (da den maaskee ikke ellers vilde falde Begyndere saa let) jeg her vil vise; den lader sig henføre under følgende Regler:

1) Ethvert enkelt Leed i en Ligning kan flyttes fra den ene Side til den anden (§. 21) med forandret Tegn. F. Ex. $3x - 12 = 20 + 8$ kan forandres til $3x = 20 + 8 + 12$, thi ved denne Omflytning er 12 egentlig lagt til paa begge Sider; ligeledes kan $3x + 8 = 30 + 18$ forandres til $3x = 30 + 18 - 8$, hvor 8 egentlig subtraheres fra paa begge Sider, og Ligningen bliver altsaa i begge Tilfælde uforandret (Arithm. §. 38 No. 4).

2) Tegnene ved alle Ledene i en Ligning kan forandres til de modsatte. F. Ex. Ligningen $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ kan udtrykkes saaledes: $-2x - 12 + 8 = -54 + 3x$. Rigtigheden indsees af No. 1, da det egentlig ikke er andet end at alle Ledene flyttes, og derpaa Siderne omsættes.

3) Enhver Ligning lader sig bringe til at være liig Nul ɔ: at alle Ledene bringes paa een Side, f. Ex. den No. 2 anførte Ligning $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ bliver $2x + 12 - 8 - 54 + 3x = 0$.

4) Ved at dividere hele Ligningen med en fælles Faktor udtrykkes Ligningen simplere; og den

den ubekiendte Størrelse befries fra sin bekiendte Coefficient, naar hele Ligningen dermed divideres. F. Ex. $15bc = 24ab + 3bx$ udtrykkes, ved at dividere overalt med $b$, saaledes $15c = 24a + 3x$; ved igien at dividere med den fælles Faktor 3 (som tillige er den ubekiendte $x$'s Coefficient), faaer man $5c = 8a + x$.

5) Enhver Divisor bortskaffes ved at multiplicere alle Ledene i Æqvationen dermed.

Ex. $\frac{x}{5} = 20$ bliver, ved at multiplicere med 5, $x = 20 \times 5$.

Tillæg. Brøk bortskaffes af en Ligning ved at multiplicere hele Ligningen med Produktet af Brøkenes Nævnere. Ex. Af Ligningen $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = a - \frac{3}{4}b$ bliver, ved at multiplicere med $3 \times 2 \times 4 = 24$, følgende Ligning: $16x - 12x = 24a - 18b$.

Anm. Her kunde det samme været opnaaet ved at multiplicere med 12, som er fælles Nævner for Brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. (Arithm. §. 32).

6) For at formindske Ledenes Antal i en Ligning, og især for at kunde befrie den ubekiendte Størrelse fra sine Coefficienter, trækker man de forskiellige enkelte Coefficienter, som samme Størrelse kan have, sammen i en Parenthese. Ex. $2x + 3x = 20$ forandres

dres $(2+3)x=20$, eller $5x=20$. $ax-bx+cx=fh+gh$ forandres saaledes: $(a-b+c)x=(f+g)h$, og efter No. 4 $x=\frac{(f+g)h}{a-b+c}$.

7) En Potens (med enhver Exponent) bortskaffes af en Æqvation ved at bringe den allene paa den ene Side og udtrække den Rod paa begge Sider, som Exponenten angiver. Ex. $x^2-8=17$, efter No. 1, $x^2=17+8=25$, altsaa $\sqrt{x^2}=\sqrt{25}$, og $x=5$. Ligeledes bortskaffes Rodtegnet eller en irrational Størrelse, ved at bringe den allene paa den ene Side, og derpaa ophøie begge Sider til den Potens, som Exponenten i Rodtegnet angiver. Ex. $\sqrt{x}+a-b=c$ bliver $\sqrt{x}=c-a+b$ og $(\sqrt{x})^2=(c-a+b)^2$ $x=(c-a+b)^2=c^2-2ca+a^2-2(c-a)b+b^2$. (Ar. §. 55 Till. 2).

For strax at see Anvendelsen af disse Regler tilføies et Par Exempler.

Lad til Opløsning være givet

$$\frac{a}{x}-b=c-1$$

saa er efter No. 5) $a-bx=cx-x$

No. 1) $x-cx-bx=-a$

No. 2) $-x+cx+bx=a$

No. 6) $(-1+c+b)x=a$

No. 4) $x = \frac{a}{-1 \mp c \mp b}$ og nu er Ligningen opløst.

Fremdeles være $ax + bn - bx = cn$

saa er efter No. 1) $ax - bx = cn - bn$

6) $(a-b)x = (c-b)n$,

4) $x = \frac{(c-b)n}{a-b}$

Anm. At reducere en Ligning er egentlig ikke andet, end ved Anvendelse af de her foredragne Regler at forkorte den og fremstille den saa simpel som muligt.

§. 23.

Ligningerne pleie at inddeles med Hensyn til den eller de ubekiendte Størrelser der findes i dem;

1) I bestemte, som kun have een ubekiendt Størrelse, hvis Værd altsaa ved de bekiendte fuldkommen er bestemt, enhver saadan Ligning kan derfor nøiagtigt opløses; Ex. $2x = 30 - 7$, hvor $x = \frac{30-7}{2}$; og ubestemte, der have to eller flere ubekiendte Størrelser, hvis Værdie ved den ene Ligning ikke kan bestemmes og Ligningen altsaa ikke opløses (§. 22.) Ex. $x + y = 20$, hvor x og $y$ kan tillægges 20 forskiellige Værdier.

2) I enkelte (eller af første Grad), hvor den eller de ubekiendte Størrelser allene forekomme i første Potens; dog maae de ikke være multiplicerede

med

med hinanden, og heller ikke forekomme baade som Divisor og Faktor. Ex. $\frac{3x}{4} + 12 - 8 = 10 - x$; men $(100 - x)\,x = a$ er ikke længer en enkelt Ligning, heller ikke $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{100}{x}$; da ved Opløsningen den ubekiendte Størrelse vil blive multipliceret med sig selv, og saaledes forekomme i en høiere Potens. Og sammensatte (maaskee rettere høiere), hvor den ubekiendte Størrelse forekommer i noget enkelt Leed anderledes end i første Potens, og Ligningen kaldes da af 2den, 3die eller 4de Grad, eller qvadratisk, cubisk, biqvadratisk, eftersom den ubekiendte Størrelse forekommer i 2den, 3die eller 4de Potens.

En sammensat (høiere Ligning) er igien enten reen (pura), naar den bekiendte Størrelse forekommer overalt i Ligningen i samme Potens; eller ureen (forviklet, impura affecta), naar den i samme Æqvation forekommer i flere forskiellige Potenser.

Anm. Algebra (i en ængere Forstand) indskrænker sig allene til at lære Opløsningen af de enkelte og qvadratiske saavel reene som urene Ligninger; Ligninger derimod af 3die, 4de o. s. v. Grad (der sædvanlig indbefattes under Navnet høiere Ligninger) opløses efter Theorier, der foredrages i den almindelige Analyse, som og kaldes Algebra i en vidtløftig Bemærkelse.

II. Om

## II. Om enkelte Ligningers Opløsning og deres Anvendelse paa arithmetiske Problemer.

§. 24.

**Opgave.** At opløse en enkelt Ligning med een ubekiendt Størrelse (bestemt Ligning).

**Opløsn.** Man bortskaffer Brøkene, hvormed den ubekiendte kunde være multipliceret, eller de hele Tal, hvormed den kunde være divideret efter §. 22. No. 5, (forekommer den ubekiendte selv som Divisor, maa med den og multipliceres); derpaa bringes efter §. 22 No. 1 de ubekiendte Størrelser paa den eene og de bekiendte paa den anden Side. Nu samles den ubekiendte Størrelses Coefficienter i en Parenthes (No. 6), og dermed divideres hele den anden Side af Ligningen, der bestod af lutter bekiendte (No. 4).

Ex. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = 28 - \frac{3}{4}x$

| | |
|---|---|
| Brøken bortskaffes ved at multiplicere med 12, som er Produktet af begge de forskiellige Nævnere man faaer | $8x - 3x = 336 - 9x$ |
| de ubekiendte bringes paa een Side, og derpaa blive | $8x - 3x + 9x = 336$ |
| den ubekiendtes Coefficienter bragte i Parenthes, og man faaer | $(8 - 3 + 9)x = 336$ |

man

Man dividerer med den ubekiendtes Coefficienter, og Ligningen er da opløst ɔ: man har fundet Værdien for $x$ } $x = \frac{336}{8 - 3 + 9}$

Anm. Da Coefficienterne ved den ubekiendte her vare Tal, kunde man strax have adderet og subtraheret dem, uden at bringe dem i Parenthes.

§. 25.

Et algebraisk Problem (Opgave) er egentlig et Spørgsmaal, hvorledes man af nogle givne bekiendte Størrelser kan finde Værdien for een eller flere ubekiendte, som derved bestemmes. Saavidt saavel de bekiendte som ubekiendte Størrelser ere Tal, eller kunde udtrykkes ved Tal, kan Problemet kaldes arithmetisk; ere de derimod Linier, geometrisk.

Det første og vigtigste ved et Problems Opløsning er, at man af de i Problemet anførte Betingelser og Forbindelser imellem de bekiendte og ubekiendte Størrelser kan udlede (eller danne) en Ligning. Dette kalder man at formere en Ligning. Maaden, hvorpaa den første Ligning (fundamental- eller Grund-Ligning) af ethvert Problems Betingelser skal udledes, lader sig ikke bestemme i Almindelighed, men overlades til enhvers egen Dømmekraft, som ved mange Exempler bør øves; alt hvad derom i Almindelighed kan foreskrives, er efter mit Skiønnende denne Regel: Man skielner først

nøie, hvad Spørgsmaals-Tingen (quæsitum) eller den ubekiendte Størrelse er; være dernæst opmærksom paa alle Betingelser derved; nøie giøre Forskiel paa det Hovedsagen uvedkommende og kun som Biting anførte, og det der til Problemets Opløsning er væsentlig nødvendigt; og endelig søge at udtrykke i det algebraiske Sprog de imellem de bekiendte og ubekiendte Størrelser i Problemet anførte Forbindelser.

Er Grund-Ligningen formeret, da er Problemet opløst, naar Ligningen er opløst, hvis der i Problemet kun er een Ting der spørges om eller een ubekiendt Størrelse; og om saadanne Problemer er det her først handles.

§. 26.

1ste Opgave. En Mand giver den første Fattige han møder Halvparten af de Penge han har hos sig; den anden Fierdeparten af de Penge, han fra Begyndelsen havde; den tredie Ottendeparten af samme Penge, og den fierde Tolvteparten; nu finder han at han har 3 Skilling tilbage. Der spørges, hvor mange Penge han fra Begyndelsen havde, og hvad hver Fattig fik.

Opløsn. Det sees let, at her kun er een ubekiendt Størrelse, nemlig hvor mange Penge han

havde ialt; thi hvad hver Fattig fik, findes da ved simpel Regning.

Vi kalde altsaa det Tal, der udtrykker Mængden af hans Penge i Skillinger, $x$, og finde Fundamental-Ligningen saaledes:

| Med Ord: | Med algebraiske Tegn: |
|---|---|
| Der søges et Tal | $x$ |
| hvis Halvpart og | $\frac{1}{2}x$ |
| Fierdepart og | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x$ |
| Ottendepart og | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x$ |
| $\frac{1}{12}$ part og 3 Sk. | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{12}x+3$ |
| udgiør Tallet | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{12}x+3=x$ |

Vi have nu Grundligningen:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{12}x+3=x.$$

Brøken bortskaffes ved at multiplicere med Brøkens mindste fælles Nævner 24 (§. 22 No. 5), og vi har $12x+6x+3x+2x+72=24x$
Ligningen forkortes, og er $23x+72=24x$
De ubekiendte bringes
paa een Side (§. 22 No. 1) $72=24x-23x$
deraf efter No. 6; $72=(24-23)x$
$72=1x=x.$

Det søgte Tal er altsaa 72, og han havde hos sig 72 Skilling. Første Betler fik $\frac{1}{2}\times 72=36$ ß., anden fik $\frac{1}{4}\times 72=18$ ß., tredie fik $\frac{1}{8}\times 72=9$ ß., fierde fik $\frac{1}{12}\times 72=6$ ß.; lægges nu disse Summer sammen, udkommer Tallet 69, som, forøget

med

med de 3 Skilling, han beholdt tilbage, udgiør 72 Sk., der saaledes er Prøve-Regning, hvoraf sees, at det fundne Tal 72 er det rette.

Till. Ved at betragte saavel Fremgangsmaaden ved at formere Fundamental-Ligningen som Prøve-Regningen i foregaaende Problem, kunde og udledes følgende Regel for at faae et arithmetisk Problem bragt i en Ligning: Man forestiller sig at Problemet allerede var opløst, og at man vilde giøre Prøve; man seer da, at der med det til Problemets Opløsning fundne Tal maatte foretages visse Forandringer (Regnings-Operationer) for at udbringe et vist Tal, der efter Problemets Bestemmelse maa udkomme, hvis Problemet er rigtig opløst. Nu vælger man et Bogstav, f. Ex. X, og behandler det paa samme Maade som man ved Prøven behandlede det Tal, der var fundet at skulde opløse Problemet, og hvad der ved denne Behandling udkommer, sættes paa den eene Side af Ligheds-Tegnet, og paa den anden Side det som skulde udkomme, hvis Problemet var rigtig opløst.

Anm. Videre Anviisning, især for dem der vilde lære sig selv Algebra, af Problemets Betingelser at danne Fundamental-Ligningen, findes i Rahr's Veiledning i Algebra. Kiøbenh. 1802.

§ 27.

§. 27.

2den Opgave. At finde et Tal, hvis Halvpart, Trediepart og Fierdepart tilsammenlagte ere een større end Tallet selv.

Fundamental-Ligningen dannes let ved at ansee det søgte Tal som fundet og kalde det X, dermed foretages de angivne Forandringer, man tager nemlig dets Halvpart, Trediepart og Fierdepart og summerer dem; denne Sum sættes paa den eene Side af Ligheds-Tegnet og udgiør Ligningens eene Side; og paa den anden Side det der skulde udkomme efter Betingelsen, nemlig Tallet X og een.

Algebraisk udtrykt staaer det saaledes:

Tallet $= x$

dets Halvpart $= \frac{1}{2}x$

Trediepart $= \frac{1}{3}x$

Fierdepart $= \frac{1}{4}x$

summende $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$

der er een større end Tallet selv; altsaa bliver Fundamental-Ligningen:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$, der forandret (§. 22 No. 5) er $6x + 4x + 3x = 12x + 12$

og forkortet . . . . $13x = 12x + 12$

De ubekiendte bringes

paa een Side (§. 22 No. 1) $13x - 12x = 12$

forkortet . . . . . . . . . . $x = 12$

12 er saaledes det fundne Tal, som ved Prøve

ogsaa

ogsaa findes at opfylde Betingelserne, da dets Halvpart 6, og Trediepart 4, og Fierdepart 3 sammenlagte udgiøre 13, som er een høiere end Tallet selv.

§. 28.

3die Opgave. Een kiøbte en Sabel, en Ring og et Lomme-Uhr; alle tre Stykker koste 100 Rdlr., men Ringen koster 4 Rdlr. mere end Sablen, og Uhret 20 Rdlr. mere end Ringen. Spørges: hvad har Kiøberen givet for ethvert Stykke?

Oplløsn. Ved første Diekast synes det som her vare tre ubekiendte Størrelser; men ved, efter den 25 §. givne Regel, nøie at overveie Betingelserne, sees, at kuns Sabelens Priis er den søgte Størrelse, da de øvrige derved bestemmes. Fundamental-Ligningen findes da efter §. 25 og 26 Till.

Naar Sabelens Priis sættes $= x$

og følgelig Ringens $= x + 4$ Rdlr.

og Uhrets $= x + 24$ Rd.

at være; $x + x + 4 + x + 24 = 100$

forkortet $3x + 28 = 100$

(§. 22. No. 1) $3x = 100 - 28 = 72$

(§. 22. No. 4) $x = 24$ som er Prisen for Sablen; deraf findes Ringens at være 28 og Uhrets 48, som sammenlagte udgiøre 100 Rdlr.

§. 29.

§. 29.

4de Opgave. En Coureer, der daglig skal reise 8 Mile, er allerede for 9 Dage siden afgaaet; en anden sendes nu for at indhente ham, og befales at reise daglig 12 Mile. Sporges: hvor mange Dage vil forløbe fra den sidstes Afreise førend han naaer den første?

Opløsn. Fundamental-Ligningen findes let, naar man lægger Mærke til, at den sidste just da har naaet den første, naar de begge have reist lige mange Mile.

Kaldes nu Antallet af de Dage, den sidste reiser (som er den søgte Størrelse) $x$, saa er Mile-Antallet $= 12x$; den første var reist 6 Dage forud, følgelig i alt $x + 6$ Dage, og Mile-Antallet $= (x + 6)\,8$.

Saaledes er $12x = (x + 6)\,8$

og naar Parenthesen hæves . . . $12x = 8x + 48$

(§. 21. No. 1) $12x - 8x = 48$

forkortet . . $4x = 48$

(§. 21. No. 4) . . $x = 12$.

Till. 1. Udtrykker man de bekiendte Størrelser ved Bogstaver, nemlig de første Bogstaver af Alphabetet (§. 21), saa faaer man ved Ligningens Opløsning en almindelig Form, der

giel-

gielder for alle lignende Tilfælde, og hvoraf igien kan udledes saa mange forskiellige Ligninger som der findes Størrelser, da enhver kan antages som ubekiendt og bestemmes ved de øvrige.

Kalde vi i nærværende Exempel Mile-Tallet, den første Coureer A reiser daglig, $a$, de Dage, han har reist forud, $b$, og Milene, den anden B reiser daglig, $c$, saa bliver Grundligningen:

$$(x+b)a = cx$$

og $ax + ab = cx$

(§. 20. No. 6) $ab = cx - ax = (c-a)x$

No. 4) $\frac{ab}{c-a} = x$, som udtrykt med Ord er: Man finder Dage-Antallet $x$, efter hvilke B vil indhente A, naar man dividerer Milene, som A har forud, med Differencen imellem de Mile, de daglig begge reise.

Till. 2. Af disse fire Størrelser $a$, $b$, $c$, $x$, som Ligningen indeholder, kan enhver antages som ubekiendt og de øvrige findes. Saaledes findes $b = \frac{(c-a)x}{a}$, thi vi havde $\frac{ab}{c-a} = x$

altsaa (§. 20. No. 5) $ab = cx - ax$

og (§. 20. No. 6) $ab = (c-a)x$

(§. 20. No. 4) $b = \frac{(c-a)}{a}x$ ɔ: Antallet af Dagene, A har reist forud, findes naar

Differencen af deres daglige Mile multipliceres med Antallet af B's Reisedage og Produktet igien divideres med Antallet af de Mile, A reiser daglig.

Paa samme Maade findes $c = \frac{ab}{x} + a$;

og $a = \frac{cx}{b+x}$.

§. 30.

5te Opgave. Man har to Massær af forskiellige givne Værdier; der sporges: hvormeget man skal tage af hver, for at frembringe en Blanding af en vis bestemt Værdie (som dog er imellem de to givne)? Lad Eenheden af den bedre Masse koste $a$, af den ringere $b$, og af Blandingen $c$.

Ved at anvende de forhen givne Regler sees let, at den ubekiendte Størrelse X er den Deel af een af de givne Masser, som vi tage til Blandingen; thi er den bestemt, følger af sig selv, at det der tages af den anden Masse maa være hvad X mangler i Eenheden.

Lad her X være det af den ringere Masse der tages, saa maa af den bedre tages $1 - x$; Prisen bliver for begge Dele altsaa $bx + a(1-x) = bx + a - ax$. Dette skal være Værdien af Blandingen, som er bestemt $= c$; vi faae altsaa Fundamental-Aeqvationen

$$bx + a - ax = c$$

(§. 22 No. 1) $bx - ax = c - a$

(§. 22 No. 2) $ax - bx = a - c$

(§. 22 No. 6) $(a - b)x = a - c$

No. 4) . . . . $x = \frac{a - c}{a - b}$

Det er: Man finder den Deel man skal tage af den ringere Masse for at frembringe Blandingen, naar Forskiellen imellem Værdien for en vis Eenhed af den givne Masse og af Blandingen divideres med Forskiellen mellem Værdien for samme Eenhed af begge de givne Masser.

Ex. Af en bedre Slags Viin som koster 40 ß. Potten og en ringere Slags der koster 24 ß. vil en Viintapper giøre en Blanding som kan sælges for 2 Mk.; hvormeget skal han tage af hver Sort? Efter Formen findes hvad han skal tage af den ringere Sort at være

$$x = \frac{40 - 32}{40 - 24} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

følgelig skal han tage Halvdelen af den ringere Sort og altsaa Halvdelen af den gode for at faae Blandingen til den bestemte Priis.

Sætte vi, at han isteden for ringere Viin blander Vand i den bedre for at kunde sælge den for den bestemte Priis, og der spørges: hvormeget Vand han kan sætte til? da findes det efter sam-

me Form; kun at $b$ sættes $= 0$, da Vand intet koster.

Efter den fundne Form var $x = \frac{a - c}{a - b}$

men $b = 0$, altsaa er $a = \frac{a - c}{a}$ og med

Tal $x = \frac{40 - 32}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$, følgelig

maa han til den gode Viin sætte $\frac{1}{5}$ Vand for at kunde sælge den til den bestemte Priis.

§. 31.

6te Opgave. En Kiøber nogle Alen Tøi og betaler for hver 2 Alen 7 Rdlr.; han sælger igien hver 3 Alen for 11 Rdlr. og vinder derved 50 Rdlr. Nu spørges, hvormange Alen Tøi han kiøbte.

Ved opmærksomt at betragte Opgaven sees let, at den Sum, han udbragte ved sit Salg, maa være saa stor som baade Indkiøbssummen og Gevinsten.

Antallet af Alen Tøi være $x$; Prisen for det Solgte findes da saaledes:

$$3 \text{ Alen} : x \text{ Alen} = 11 \text{ Rdlr.} : \frac{11x}{3}$$

Indkiøbsprisen saaledes $2 \text{ Al.} : x \text{ Al.} = 7 \text{ Rd.} : \frac{7x}{2}$

Grundligningen er følgelig $\frac{7x}{2} + 50 = \frac{11x}{3}$

altsaa (§. 22. No. 5.) $7x + 100 = \frac{22x}{3}$

deraf . . . . $21x + 300 = 22x$

§. 22. No. 1.) $300 = 22x - 21x = x$, han havde kiøbt 300 Alen.

## §. 32.

7de Opgave. At dele et givet Tal $a$ i to Dele saaledes, at den større Deel, forøget med et givet Tal $b$, skal forholde sig til den mindre, forøget med et givet Tal $c$, som $m:n$.

Af dette Problems Betingelser lader sig ikke strax umiddelbar udlede nogen Grundligning, men kun en Proportion, hvoraf Ligningen (Arithm. §. 73.) let findes. Sættes her den største Deel af Tallet $a = x$, saa er den mindre $a - x$, og Proportionen bliver

$$(x + b) : (a - x + c) = m : n$$

deraf følger $n(x + b) = m(a - x + c)$

som bliver $nx + nb = am - mx + cm$

(§. 22 No. 1.) $nx + mx = am + cm - bn$

No. 6.) $(n + m)x = am + cm - bn$

$$x = \frac{am + cm - bn}{n + m}$$

Ex.

Ex. Lad være $a = 24$, $b = 13$, $c = 5$, $m = 10$, $n = 5$, saa er

$$x = \frac{24 \times 10 + 5 \times 10 - 13 \times 5}{10 + 5}$$

$$x = \frac{240 + 50 - 65}{15} = \frac{225}{15} = 15.$$

Altsaa er den største Deel 15,
følgelig den mindre . . . . 9, der ogsaa opfylde Betingelsen, da $(15 + 13) : (9 + 5) = 10 : 5$.

§. 33.

Indeholder en Opgave to eller flere ubekiendte Størrelser, eller der ere to eller flere Ting, hvorom der spørges, da, naar den indeholder tillige saa mange Betingelser, at deraf kan, efter de forhen anførte Regler, udledes ligesaamange Grundligninger, som Opgaven indeholder ubekiendte Størrelser, findes Værdien for enhver af de ubekiendte paa følgende Maade:

Man søger af de fundne Grundligninger, hvori der efter Ligningernes Antal ere to eller flere ubekiendte Størrelser, at fremBringe en eeneste Ligning, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse; dette kaldes at eliminere eller bortskaffe den eller de ubekiendte; og det opnaaes paa een af disse tre Maader:

 1) Ved

1) Ved Substitution (maaskee man kunde med et nyt Ord kalde det Istedsættelse) ɔ: ved at søge af den første Ligning en Værdie for den ubekiendte Størrelse man først vil bortskaffe (hvilken kan vælges vilkaarligt) og indsætte denne fundne Værdie i de andre Ligninger; dernæst paa samme Maade søge en Værdie for den anden ubekiendte af den anden Ligning, og indsætte den i de andre Ligninger o. s. f.

Lad til Exempel være givne følgende tre Grundligninger:

1) $x + y = 30$
2) $y + z = 18$
3) $x + z = 24$

Man søger af Ligningen No. 1. efter de §. 22. forklarede Regler, en Værdie for $x$, og finder da $x = 30 - y$. Denne Værdie for $x$ indsat i No. 3 giver No. 4, nemlig

$30 - y + z = 24$, som behørig reduceret giver No. 5; $y - z = 6$.

Af No. 2 findes $y = 18 - z$ denne Værdie indsat i No. 5 giver $18 - z - z = 6$, som reduceret og omsat bliver $2z = 18 - 6$

$2z = 12$

og følgelig $z = 6$. Indsættes nu denne fundne Værdie i No. 5; findes $y = 12$, og denne Værdie indsat i No. 1 giver $x = 18$.

2) Ved

2) Ved Combination (Forbindelse) ɔ: af to forskiellige Ligninger, hvori samme ubekiendte Størrelse findes, søger man to forskiellige Udtryk for denne ubekiendte Størrelses Værdie; disse Udtryk maa være ligestore (Arithm. §. 38), og forenede ved Ligheds-Tegn give de en Æqvation, hvori denne ubekiendte Størrelse ikke findes, og saaledes vedblives indtil man faaer en Æqvation, hvori kun er een eeneste ubekiendt. Lad til Exempel være givne tre Ligninger:

A) $x + y + z = 36$

B) $x + 3y - 2z = 48$

C) $x - y + 3z = 30$

Nu findes af Æqvation A, $x = 36 - y - z$,

af Æqvation B, $x = 48 - 3y + 2z$

og af Æqvation C, $x = 30 + y - 3z$.

Af A og B faaes (Arithm. §. 38.) Ligningen D: $36 - y - z = 48 - 3y + 2z$, hvoraf findes: $2y = 48 - 36 + 3z$

og $y = \frac{12 + 3z}{2}$

af B og C faaes $30 + y - 3z = 48 - 3y + 2z$

og $4y = 28 + 5z$

$y = \frac{28 + 5z}{4}$

Ved at combinere de to for $y$ fundne Værdier faaer man

$\frac{28 + 5z}{4} = \frac{12 + 3z}{2}$, som er en Ligning

ning, hvori der kan findes en ubekiendt Størrelse, der opløses efter de forklarede Regler og bliver

(§. 22. No. 5) $28 + 5z = \frac{48 + 12z}{2}$

$$56 + 10z = 48 + 12z$$
$$56 - 48 = 12z - 10z$$
$$8 = 2z$$
$$4 = z$$

Denne Værdie indsat i den iforveien udledte Æqvation

$$y = \frac{28 + 5z}{4} \text{ give}$$
$$y = \frac{28 + 20}{4} = 12 \text{ og}$$

disse for $y$ og $z$ fundne Værdier indsatte i Æqvationen $x = 36 - y - z$ giver

$$x = 36 - 12 - 4$$
$$x = 20.$$

3) Ved Addition eller Subtraction ɔ: ved at addere eller subtrahere to Æqvationer, hvori findes flere ubekiendte Størrelser, at bortskaffe den ene, som skeer:

a) Naar den ubekiendte har samme Coefficient i begge Æqvationer: ved at addere Ligningerne sammen naar den ubekiendte Størrelse har + i den ene og — i den anden Ligning; men ved at subtrahere den ene Ligning fra den anden naar den ubekiendte har samme Tegn i dem begge.

Ex.

Ex. $3x - 2y = a$
$x + 2y = b$

Heraf ved Addition $4x = a + b$

$3x - 4y = a$
$2x - 4y = b$
$- \quad + \quad -$

ved Subtraction $x = a - b$

b) Naar den ubekiendte, man vil bortskaffe, har forskiellige Coefficienter i de givne Æqvationer, da maae Æqvationerne forandres saaledes, at den ubekiendte faaer samme Coefficient i begge, som skeer ved at multiplicere alle Ledene i den ene Æqvation med den Coefficient, som den ubekiendte Størrelse har i den anden; og derpaa fortfare som i forrige Tilfælde.

Ex. No. 1. $3x + 2y = a$
No. 2. $x - 3y = b$

Skal $y$ bortskaffes, multipliceres
No. 1 med 3, og vi faae $9x + 6y = 3a$
og No. 2 med 2, hvor vi faae $2x - 6y = 2b$
Ved Additionen findes nu $11x = 3a + 2b$

Den videre Anvendelse af disse Methoder til at bortskaffe (eliminere) de ubekiendte Størrelser paa een nær, naar der ere givne saa mange Æqvationer som der ere forskiellige ubekiendte Størrelser, vil bedst sees ved Anvendelsen deraf til Problemers Opløsning.

§. 34.

§. 34.

8de Opgave. En har to Sølvbægere, men kun eet Laag; det første Bæger veier 12 Lod, men tilligemed Laaget dobbelt saa meget som det andet; det andet veier tilligemed Laaget tre Gange saa meget som det første. Der sporges: hvad veier Laaget? og hvad veier det andet Bæger?

Her er to ubekiendte Størrelser; Vægten af Laaget, som vi vil kalde $x$, og Vægten af det andet Bæger, som kan være $y$. Vi finde nu let, ved at overveie Betingelserne, følgende to Grundligninger:

1) $x + 12 = 2y$ { ɔ: Laagets Vægt $x$ Lod og det første Bægers 12 Lod er det dobbelte af det andet Bægers Vægt $2y$.

2) $y + x = 3 \times 12$ { ɔ: Vægten af Laaget og det andet Bæger $x + y$ liig det tredobbelte af første Bægers Vægt $3 \times 12$.

Vil vi anvende Substitutions-Methoden (§. 33. I.) da søges Værdien for $x$ i den første Æqvation, og findes $x = 2y - 12$. Denne Værdie indsat i den anden Æqvation, faae vi Ligningen

$y + 2y - 12 = 3 \times 12$, som har kun een ubekiendt Størrelse, og opløses let efter

de

givne Regler; og findes

$$3y = (3 \times 12) + 12 = 48$$

$$y = 16$$

men vi havde $x = 2y - 12$

altsaa $x = 32 - 12 = 20.$

Tillæg. Med Fordeel kunde her Subtractions-Methoden været brugt, da $x$ findes i begge Æqvationer med samme Exponent, nemlig 1; man kunde altsaa strax, ved at subtrahere den anden Æqvation fra den første, elimineret $x$. Opløsningen vilde da blevet saaledes:

De fundne Grund- ligninger vare $\begin{cases} 1) & x + 12 = 2y \\ 2) & y + x = 3 \times 12 \end{cases}$

$\quad - \quad - \quad -$

subtraheer 2 fra 1 og vi faae $12 - y = 2y - 36$

som omsat giver . . . . . $48 = 3y$

og . . . . . . . . . . $16 = y.$

Anm. Additions- og Subtractions-Methoden giver i Almindelighed den hurtigste Elimination, og anvendes med Fordeel naar de ubekiendte Størrelser ikke ere multiplicerede med hinanden, eller i forskiellige Ligninger ophøiede til forskiellige Potenser.

## §. 35.

9de Opgave. Ved et vist Arbeide have A og B arbeidet tilsammen i 6 Dage og fortient 480 ß., A og C tilsammen i 9 Dage og fortient 648 ß., B og C i 15 Dage og fortient

tient 960 ß.; sporges: hvad har enhver Arbeider, nemlig A, B og C fortient daglig?

Kalde vi A's daglige Fortieneste $x$ ß.
B's . . . . . $y$
og C's . . . . . . $z$

saa have vi følgende tre Grundlinger:

$$1)\ 6x + 6y = 480$$
$$2)\ 9x + 9z = 648$$
$$3)\ 15y + 15z = 960$$

Nu bortskaffes ved en af de (§. 33) nævnte Methoder først den eene og derpaa den anden af de tre ubekiendte Størrelser, saa at man erholder tilsidst en Æqvation, hvori kun er een ubekiendt Størrelse. Combinations-Methoden vil vi her anvende, og finde da

af No. 1) $x = \dfrac{480 - 6y}{6} = 80 - y$

af No. 2) $x = \dfrac{648 - 9z}{9} = 72 - z$

som combinerende giver Æqvationen

No. 4) $72 - z = 80 - y$.

Heraf findes efter de (§. 22) givne Regler

$y = z + 8$, og af No. 3 findes

$$y = \frac{960 - 15z}{15} = 64 - z.$$

Disse Udtryk for $y$ give Æqvationen

No. 5) $z + 8 = 64 - z$

$2z = 56$

$z = 28.$

Denne fundne Værdie af $z$ indsat i Eqvationen No. 4 giver $y = 36$, og i No. 2 giver den $x = 44$.

Saaledes har A fortient 44 ß., B 36 ß., og C 28 ß. daglig.

§. 36.

10de Opgave. Af to Tals givne Summa $= a$ og deres Differents $= b$ at finde Tallene selv.

Oplosn. Tallene være $x$ det større, og $y$ det mindre (thi ere de ligestore, opløses Problemet af sig selv, da ethvert Tal er den halve Summa); vi have da af Betingelserne to Grund-Eqvationer:

1) $x + y = a$

2) $x - y = b$

Ved Additions-Methoden (§. 33 No. 3) $2x = a + b$

$$x = \frac{a + b}{2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$$

ɔ: det største af to ubestemte Tal (hvis Sum og Difference er bekiendt) findes naar til deres halve Summa adderes deres halve Difference. Indsættes nu denne Værdie for $x$ i Ligningen No. 1,

saa

saa have vi $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + y = a$
omsat $y = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$
ɔ: Det mindste af de to ubekiendte Tal findes naar fra deres halve Summe subtraheres deres halve Difference.

Ex. Sæt Summen $a = 70$, Differencen $b = 12$, saa er $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 35 + 6 = 41$
$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 35 - 6 = 29.$

Anm. Ved at udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver fandtes her ved Opløsningen en almindelig Regel, som gielder for alle Tilfælde af den Art.

§. 37.

11te Opgave. Af to Rør løber Vand i eet og samme Kar; det første Rør løber i to Timer, det andet i tre Timer, og man finder i Karret 195 Potter Vand. En anden Gang løber det første Rør i fem, det andet i fire Timer, og man finder i Karret 330 Potter Vand. Der spørges: hvormange Potter Vand har ethvert Rør givet i een Time?

For at giøre Opløsningen almindelig og til Øvelse i at regne med Bogstaver, vil vi udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver og sætte $a = 2$ Timer, $b = 3$ Timer, $m = 195$ Potter, $c = 5$ Timer, $d = 6$ Timer og $n = 330$

Pot-

Potter. Vi kalde nu de Potter Vand, det første Rør giver i een Time, $x$, og de Potter, det andet Rør giver, $y$, og vi faae følgende Fundamental-Aeqvationer:

$$1)\ ax + by = m$$
$$2)\ cx + dy = n$$

Af No. 1 findes $x = \frac{m - by}{a}$

Denne Værdie for $x$ indsættes i No. 2 ved Substitution (§. 33), og vi faae

$$c\left(\frac{m - by}{a}\right) + dy = n$$

$$\frac{cm - bcy}{a} + dy = n$$

$$cm - bcy + ady = an$$
$$ady - bcy = an - cm$$
$$(ad - bc)y = an - cm$$

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

Indsættes nu denne Værdie for $y$ i Aeqvationen

$$x = \frac{m - ay}{a}$$

saa har vi $x = \frac{m}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{an - cm}{ad - bc}\right)$

$$x = \frac{m}{a} - \left(\frac{ban - bcm}{aad - abc}\right)$$

Bringes Brøkene til eens Benævning,

saa er $x = \frac{mad - mbc - ban + bcm}{aad - abc}$

reduceret er $x = \frac{mad - ban}{aad - abc}$

forkortet $x = \frac{md - bn}{ad - bc}$

Indsættes nu de givne Værdier i Tal, saa

er $y = \frac{(2 \times 330) - (5 \times 195)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$

$y = \frac{-315}{-7} = 5$

$x = \frac{(4 \times 195) - (3 \times 5)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$

$x = \frac{-210}{-7} = 30$

Det første Rør giver altsaa 30 Potter Vand hver Time, og det andet 45 Potter i samme Tid.

Till. Efter det fundne almindelige Udtryk for $x$ og $y$ lader følgende Problem sig ogsaa opløse: Man blander to Sorter Sølv A og B saaledes, at 10 Mark af A og 20 Mark af B give en Masse af 30 Mark 6lødig Sølv, og følgelig 180 Lod Sølv; en anden Gang saaledes, at 30 Mark af A og 40 Mark af B give en Masse af 70 Mark $6\frac{2}{7}$lødig Sølv, der følgelig indeholder 440 Lod Sølv. Nu spør-

spørges: hvor lødig (ɔ: hvor mange Lod reent Sølv Marken af hver har indeholdt) A og B har været?

Sætte vi nu A at være $x$ lødig (ɔ: indeholde $x$ Lod reent Sølv paa Marken) og B $y$ lødig, saa have vi efter forrige Opgave, da her er $a = 10$, $b = 20$, $m = 180$, og $c = 30$, $d = 40$, $n = 440$,

$$x = \frac{md - bn}{ad - bc} = \frac{(180 \times 40) - (20 \times 440)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$$

$$x = \frac{6200 - 8800}{400 - 600} = \frac{-1600}{-200}$$

$$x = 8.$$

$$\text{og } y = \frac{an - cm}{ad - bc} = \frac{(10 \times 440) - (30 \times 180)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$$

$$y = \frac{4400 - 5400}{400 - 600} = \frac{-1000}{-200}$$

$$y = 5.$$

## §. 38.

12te Opgave. En Vert blev spurgt, hvad Viin han havde og hvad Prisen var paa hver Sort; han svarede han havde tre Slags og Prisen var saaledes: at to Potter af den ringeste, to Potter af den mellemste og een Pot af den bedste kostede i alt 120 Skilling; to Potter af den ringeste, tre Potter af den anden

anden og 4 Potter af den beste tilsammen 240 Skilling; endelig ti Potter af den ringeste, fire Potter af den anden og to Potter af den tredit Slags, tilsammen 360 Skilling. Hvad koster nu Potton af hver Slags Viin?

Lad Prisen for den ringere Sort være $= x$, for den anden $= y$ og for den tredie $= z$, saa faae vi følgende tre Grundligninger:

1) $2x + 2y + z = 120$ Skilling
2) $2x + 3y + 4z = 240$
3) $10x + 4y + 2z = 360$

Af disse tre Ligninger skal nu søges een, hvor der kun er een ubekiendt Størrelse. Vi vil til Øvelse her søge at opnaae dette ved Substitution (§. 33.)

Af den første Ligning søges en Værdie for $x$, og vi finde $x = \left(\frac{120 - 2y - z}{2}\right)$; denne substitueres i den anden Ligning, og vi har $2\left(\frac{120 - 2y - z}{2}\right) + 3y + 4z = 240$ som reduceret bliver

$120 - 2y - z + 3y + 4z = 240$
4) . . . . $y + 3z = 120.$

Den samme Værdie for $x$ indsættes i den 3die Ligning og

og vi faae $10\left(\frac{120-2y-z}{2}\right)+4y+2z=360$

$$600-10y-5z+4y+2z=360$$

$$-6y-3z=360-600$$

$$5)\ \ldots\ 6y+3z=600-360=240$$

Af No. 4 søges en Værdie for $y$, som findes at være $y=120-3z$;

denne indsættes i No. 5, og vi faae

$$6(120-3z)+3z=240.$$

Vi have nu erholdt en Æqvation, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse, der opløses efter de givne Regler, og findes:

$$720-18z+3z=240$$

$$-15z=240-720$$

$$15z=720-240=480$$

$$z=\frac{480}{15}=32 \text{ Skilling.}$$

Anm. Vedbliver man paa denne Maade, af den første af de fundne Ligninger, hvis der vare flere, at søge en Værdie for den eene ubekiendte Størrelse og indsætte denne Værdie i alle de øvrige Ligninger i Stedet for samme ubekiendte Størrelse, saa faaer man tilsidst en Ligning, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse, hvis Værdie da let kan findes; som her $z=32$ Skilling.

Indsættes nu denne Værdie i Ligningen $y=120-3z$, saa er $y=120-96$ $y=24$ Skilling, og disse Værdier for $y$ og $z$

indsatte i Ligningen $x = \frac{120 - 2y - z}{2}$

giver $x = \frac{120 - 48 - 32}{2} = \frac{40}{2} = 20$ Skill.

Prisen for den ringere Sort var saaledes 26 Skilling Potten, for den anden Sort 24 Skilling, og for den tredie Sort 32 Skilling.

Tillæg. Det samme Problem kunde være hastigere opløst ved Additions- og Subtractions-Methoden (§. 33).

Ligningerne var 1) $2x + 2y + z = 120$

2) $2x + 3y + 4z = 240$

3) $10x + 4y + 2z = 360$

No. 1 subtraheres fra No. 2, og vi faae

No. 4) $y + 3z = 140$

No. 2 multipliceres

med 5, og vi faae No. 5) $10x + 15y + 20z = 1200$

No. 3 subtraheres

fra 5, og vi faae No. 6) $11y + 18z = 840$

No. 4 multipliceres

med 6, og vi faae No. 7) $6y + 18z = 720$

denne subtraheres fra

No. 6, og vi have . . . $5y = 120$

og . . . . $y = 24$.

§. 39.

§. 39.

13de Opgave. Imellem tre Regimenter, som holdte sig tapre i en Træfning, skal 1326 Rdlr. uddeles saaledes, at enhver i det Regiment, der mest udmærker sig, skal erholde een Rigsdaler, og Resten deles lige under de to andre Regimenter. Udmærker nu det første Regiment sig, da faaer enhver Mand i de andre Regimenter $\frac{1}{2}$ Rdlr.; udmærker det andet sig, da faaer hver Mand i det første og tredie kun $\frac{1}{3}$ Rdlr., og udmærker det tredie Regiment sig, da faaer hver Mand i de to første Regimenter kun $\frac{1}{4}$ Rdlr. Nu spørges: hvor stærkt var Antallet af Mandskabet i ethvert af disse tre Regimenter?

Vi kalde Antallet i det første Regiment $x$, i det andet $y$, og i det tredie $z$; saa er

1) $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1326$
2) $y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 1326$
3) $z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 1326$

thi naar en Mand faaer 1 Rd. eller $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{4}$ Rd. saa faae $x$ Mænd $x$ Rd. eller $\frac{1}{3}x$ eller $\frac{1}{4}x$.

Vil man nu ved Addition eller Subtraction (§. 37) bortskaffe $x$, da maae man see at skaffe $x$ samme Coefficient i alle Æqvationer; man multiplicerer derfor

den anden med 3 } og faaer 4) $3y + x + z = 3978$
den tredie med 4 } og faaer 5) $4z + x + y = 5304$

Nu subtraheres Ligningen No. 1 fra No. 4, og

No. 4 fra No. 5, og vi faae $\begin{cases} 6)\ \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}z = 2652 \\ 7)\ 3z - 2y = 1326 \end{cases}$

For at $y$ nu kan faae samme Coefficient i begge Æqvationer, multipliceres No. 6 med Tallet 4, og No. 7 med 5, og deraf fremkommer

$$\text{No. } 8)\ 10y + 2z = 10608$$
$$\text{og } 9)\ -10y + 15z = 6630$$

No. 8 og 9 adderede give denne Ligning $17z = 17238$

og $z = 1014$, som er Tallet paa det tredie Regiments Mandskab. Af

No. 7 findes $y = \frac{3z - 1326}{2}$ Værdien af $z$

indsat bliver $y = \frac{3042 - 1326}{2} = 858$; som er Antallet af det andet Regiments Mandskab.

Af No. 1 findes $x = 1326 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$

$$x = 1326 - 429 - 507$$

$x = 490$ Antallet af Mandskabet i det tredie Regiment.

Anm. At anføre flere Exempler paa enkelte Ligninger med fire eller flere ubekiendte, overlades til det mundtlige Foredrag. Passende Exempler af dette Slags findes i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger og i Kahr's Veiledning i Algebra.

## III. Om qvadratiske saavel rene som urene Ligninger med een eller flere ubekiendte Størrelser.

### §. 40.

En qvadratisk Ligning (§. 23) kaldes reen (fuldkommen) naar den ubekiendte Størrelse forekommer allene som Qvadrat-Tal eller i anden Potens; ureen eller forviklet, naar den ubekiendte forekommer baade som Qvadrat-Tal og Rod eller baade i første og anden Potens.

En reen qvadratisk Ligning behandles efter de om enkelte Ligninger forklarede Regler, indtil man faaer Qvadratet af den ubekiendte Størrelse allene paa den ene Side, og lutter bekiendte Størrelser paa den anden Side ɔ: til Ligningen faaaer denne almindelige Form $x^2 = a$. Værdien af $x$ (som ogsaa kaldes Ligningens Rod) findes da ved at udtrække Qvadrat-Roden af Størrelserne, der udgiøre begge Ligningens Sider (§. 22 No. 6) og man finder $x = \sqrt{a}$. Da Qvadrat-Roden til et positiv Qvadrat-Tal kan være baade bekræftende og nægtende (§. 15), saa bliver $x = \pm\sqrt{a}$ ɔ: der gives ved Opløsningen af en qvadratisk Ligning stedse to Værdier for den ubekiendte Størrelse, baade en bekræftende og en nægtende, hvilket ogsaa udtrykkes saaledes, at enhver qvadratisk Ligning

ning har to Rødder; men da alle Qvadrat-Tal, saavel af nægtende som bekræftende Roder, nødvendig maa være bekræftende (§. 14), saa følger, at naar $a$ (de bekiendte Størrelser der udgiøre den eene Side af Ligningen) er nægtende og Formen er $x = \sqrt{-a}$, da er $x$ en umuelig Størrelse, og en Opgave, som leder til et saadant Udtryk, kan ikke opløses fordi den indeholder umulige Betingelser.

§. 41.

1ste Opgave. At finde to Tal, hvis Summa er givet at være 14, og deres Produkt 45.

Vidste man foruden Tallenes Summa tillige deres Differents da fandtes Tallene let (§. 36). Vi tænke os altsaa Differencen og kalde den $z$. Værdien for denne ($x$) søges saaledes, vi have nemlig det større Tal $x = 7 + \frac{1}{2}z$, og det mindre $y = 7 - \frac{1}{2}z$ (§. 36), følgelig

$$xy = 45 = (7 + \tfrac{1}{2}z) \times (7 - \tfrac{1}{2}z)$$

reduceret $45 = 49 - \frac{1}{4}z^2$

$$\tfrac{1}{4}z^2 = 49 - 45 = 4$$

$$z^2 = 16$$

$$z = \pm \sqrt{16}$$

$$z = \pm 4;$$

og nu findes $x = 7 + 2 = 9$

$$y = 7 - 2 = 5.$$

Anm. Sætte vi det givne Produkt 50 og Summen som før 14, da finde vi, ved at foretage den

nys

nys fremsatte Opløsning tilsidst,

$$\tfrac{1}{4}z^2 = 49 - 50 = -1$$

og $z^2 = -4$

$z = \sqrt{-4}$, som er en umuelig Størrelse, der viser, at der ikke gives to saadanne Tal, hvis Sum er 14, og hvis Produkt 50.

## §. 42.

2den Opgave. At finde tvende ulige store Tal af den Beskaffenhed, at deres Sum forholder sig til det største Tal som 7 til 5, og at Summen, multipliceret med det mindste, giver til Produkt 126.

Opløsn. Det større Tal være $x$, det mindre $y$; vi have da efter Betingelsen

$(x + y) : x = 7 : 5$ og deraf (§. 32)

Æqvationen A) $7x = 5x + 5y$

Endvidere efter den anden Betingelse

Æqvationen B) $(x + y)\, y = 126$.

Af A findes $x = \frac{5y}{2}$; denne Værdie substitueres i B, og vi faae

$$\text{C)}\ \left(\frac{5y}{2} + y\right) y = 126$$

$$\frac{5y^2}{2} + y^2 = 126$$

$$5y^2 + 2y^2 = 252$$

$7y^2$

$$7y^2 = 252$$
$$y^2 = 36$$
$$y = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Denne Værdie indsættes i Ligningen $x = \frac{5y}{2}$

og vi finde $x = \frac{\pm 30}{2} = \pm 15.$

§. 43.

3die Opgave. Nogle Personer indgaae i Compagnie med hinanden for at handle; enhver indskyder 30 Gange saa mange Rigsdaler, som der ere Personer, og med 100 Rdlr. vinder enhver tre Gange saa mange Rigsdaler som der ere Personer; endelig giver $\frac{1}{8}$ af hele Gevinsten, multipliceret med $\frac{5}{36}$, Personernes Antal.

Opløsn. Personernes Antal være $x$, Enhvers Indskud altsaa $30x$, og den hele Kapital $30x^2$; paa 100 Rdlr. vindes $3x$, altsaa ved Proportion findes den hele Gevinst saaledes:

$100 : 3x = 30x^2 : \frac{90x^3}{100}$ at være

$\frac{90x^3}{100}$, forkortet $\frac{9}{10}x^3$; en ottende Deel deraf

$= \frac{9}{80}x^3$, som multipliceret med $\frac{5}{36}$ er $= \frac{45x^3}{2880}$

for-

forkortet $\frac{1}{64}x^3$, der efter Betingelsen er liig Personernes Antal. Grundligningen er altsaa

$\frac{1}{64}x^3 = x$ som opløst efter de givne Regler bliver $x^3 = 64x$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64} = 8.$$

Der var altsaa 8 Personer, og enhver har indskudt 240 Rdlr., i alt altsaa 1920 Rdlr.

Gevinsten $100 : 24 = 1920$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 100)\,46080 \\ \hline 460\frac{4}{5} \text{ Rdlr.;} \end{array}$$

deraf en ottende Deel $460\frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = 37\frac{3}{5}$, som multipliceret med $\frac{5}{36}$ giver $\frac{288}{36} = 8$, som var Personernes Antal.

## §. 44.

En ureen qvadratisk Ligning kaldte vi den (§. 40), hvor den ubekiendte Størrelse forekommer baade som Qvadrattal, og tillige som Rod, multipliceret med en bekiendt Coefficient. Den almindelige Form for en saadan Ligning er $x^2 + ax = b$, naar $a$ og $b$ betegne bekiendte, og $x$ en ubekiendt Størrelse.

For i en saadan Ligning at finde Værdien for den ubekiendte Størrelse (som og kan kaldes Ligningens Rod), ordner man Ligningen (§. 22) saaledes:

ledes: at Qvadratet af den ubekiendte Størrelse uden nogen Coefficient med Tegnet +, bliver det første Leed i Ligningens eene Side (§. 21), og den første Potens af samme ubekiendte med dens Coefficient (der undertiden kan være en sammensat Størrelse, undertiden allene Tallet 1) det andet Leed paa samme Side; men at den anden Side af Ligningen indeholder lutter bekiendte (nægtende eller bekræftende Størrelser). Til Exempel være givet Ligningen $45x^2 = 800000 - 8000x + 20x$ ordnet vil den da staae saaledes:

$$x^2 + 320x = 32000;$$

et andet: $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$

$$(3a + b)x^2 - cx + bx = ab^2$$

$$(3a + b)x^2 + (b - c)x = ab$$

$$x^2 + \frac{b - c}{3a + b}x = \frac{ab^2}{3a + b}$$

Er Ligningen saaledes ordnet, da sees ved at sammenligne den Side af Ligningen, hvor den ubekiendte Størrelse findes og hvor den almindelige Form er $x^2 + m$ (da $m$ betyder enhver Coefficient) med det almindelige Udtryk for Qvadrattallet af enhver binomisk Rod (Arithm. §. 55) $a^2 + 2ab + b^2$, at der mangler det tredie Leed, for at den Side kunde blive et fuldkomment Qvadrattal, hvoraf Roden kunde uddrages. Da i ethvert fuldkomment Qvadrattal af en binomisk Rod det mellemste Leed ($2ab$) er Produktet af Rodens

dens første Størrelse og det dobbelte af den anden ($2ab = a \times 2b$) og følgelig det tredie Leed alletider Qvadratet af det halve af den Coefficient, hvormed den første Rodstørrelse i andet Leed er multipliceret ɔ: ($b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$): saa udledes let denne almindelige Regel: **Det tredie manglende Leed i enhver ureen qvadratisk Ligning findes naar, efterat den er ordnet, det Halve af den Ubekiendtes Coefficient i andet Leed qvaderes og lægges til paa begge Sider.**

Saaledes findes i den anførte Ligning

$$x^2 + 320x = 32000$$

det tredie Leed at være $(160)^2 = (160)^2$

og $x^2 + 320x + 25600 = 57600$

Er dette skeet, saa er Ligningens første Side et fuldkomment Qvadrattal. Nu trækkes Roden ud paa begge Sider (§. 22 No. 7), og den qvadratiske Ligning forvandles til en enkelt, som i nærværende Exempel er $x + 160 = 240$,

hvoraf findes let $x = 240 - 160 = 80$.

§. 45.

Af Ligningen $x^2 + mx = b$, der forestiller alle mulige urene qvadratiske Ligninger, finder man efter den i forrige §. forklarede Maade

$$x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2 = b + \tfrac{1}{4}m^2$$

$x^2 +$

$$x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \frac{4b + m^2}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \frac{\sqrt{4b + m^2}}{2} \quad (\S.\ 16)$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{4b + m^2}}{2}$$

Hvis i denne anførte Form den bekiendte Størrelse $4b$ havde været nægtende og større end $m^2$, saa er Værdien for den ubekiendte Størrelse umuelig eller indbildt, som for Ex.:

At finde et Tal, hvis Qvadrat, forøget med 5, bliver ligestort med det samme Tal to Gange taget.

$$\left\{\begin{array}{l} x \\ x^2 + 5 \\ x^2 + 5 = 2x \end{array}\right.$$

Heraf faae vi efter den §. 43 forklarede Fremgangsmaade: $x^2 - 2x = -5$

og $x^2 - 2x + 1 = -5 + 1 = -4$

fremdeles $x - 1 = \sqrt{-4}$

$x = 1 \pm \sqrt{-4}$.

Da Roden af $-4$ er en umuelig Størrelse, saa vil denne for X fundne Værdie allene tilkiendegive, at intet saadant Tal findes som har den anførte Egenskab, og at Opløsningen af denne Opgave er aldeles umuelig.

§. 46.

§. 46.

4de Opgave. Af to Tals givne Summa 15 og deres Produkt 44 at finde Tallene selv.

Vi have tilforn opløst dette Problem ved at søge Tallenes Difference uden at der fremkom nogen ureen qvadratisk Ligning. Nu ville vi umiddelbart søge Tallene selv. Kalde vi det ene Tal X, saa er det andet $15 - x$, og vi have, i Følge Betingelsen, følgende Grundligning:

$$x(15 - x) = 44$$

$$15x - x^2 = 44$$

(§.22 og 44) $x^2 - 15x = -44$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - 44$$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225 - 176}{4}$$

$$x - \frac{15}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x = \frac{15}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Dette Problem kan og opløses ved at antage to ubekiendte Størrelser (vi kalde nemlig de søgte Tal X og Y) og faae da

A) $x + y = 15$

B) $xy = 44$

af A) $x = 15 - y$, som indsat i B

giver D) $(15 - y)\, y = 44$

deraf

deraf $y^2 - 15y = -44$

$$y^2 - 15y + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - \frac{176}{4} = \frac{49}{4}$$

$$y - \frac{15}{2} = \pm \sqrt{\tfrac{49}{4}}$$

$$y = \frac{15}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Sætte vi med almindelige Tegn Summen $= s$ og Produktet $= p$, saa faae vi

$$x(s-x) = p$$
$$sx - x^2 = p$$
$$x^2 - sx = -p$$
$$x^2 - sx + \tfrac{1}{4}s^2 = \tfrac{1}{4}s^2 - p$$
$$x - \tfrac{1}{2}s = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$$
$$x = \tfrac{1}{2}s \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$$

Anm. Dette Udtryk for X, sammenlignet med §. 36, viser, at to Tals halve Difference er saa stor som Qvadratroden af Fierdeparten af Summens Qvadrat mindre end Produktet ɔ: $\tfrac{1}{2}d = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$.

§. 47.

5te Opgave. En blev spurgt, hvormange Penge han havde; han svarede: naar Antallet af mine Rigsdalere qvadreres, og dette Qvadrat multipliceres med 5, og fra dette Produkt igien subtraheres det Firedobbelte af Rigsdalernes Antal, bliver endnu 105 Rd. tilbage. Hvor mange Rd. havde han?

Efter

Efter Betingelserne bliver Grundligningen

$$5x^2 - 4x = 105$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x = 21$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x + \tfrac{4}{25} = 21 + \tfrac{4}{25}$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x + \tfrac{4}{25} = \frac{525+4}{25} = \frac{529}{25}$$
$$x - \tfrac{2}{5} = \sqrt{\tfrac{529}{25}}$$
$$x = \tfrac{2}{5} \pm \tfrac{23}{5} = \begin{cases} +\ 5 \\ -\ \tfrac{21}{5} \end{cases}$$

§. 48.

6te Opgave. At dele et givet Tal $a$ i to saadanne Dele, at Delenes Produkt forholder sig til Summen af deres Quadrater som $m : n$.

Lad den ene søgte Deel være $x$, saa er den anden $a - x$, og vi have Proportionen:

$$(a - x)x : x^2 + (a - x)^2 = m : n$$
$$ax - x^2 : x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = m : n$$

deraf Grundligningen

$$nax - nx^2 = mx^2 + a^2m - 2amx + mx^2$$

ordnet

$$2mx^2 + nx^2 - 2amx - anx = a^2m$$
$$(2m + n)x^2 - (2am + an)x = a^2m$$
$$x^2 - \left(\frac{2m+n}{2m+n}\right)ax = \frac{a^2m}{2m+n}$$
$$x^2 - ax = \frac{a^2m}{2m+n}$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m+n}$$

$x -$

$$x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m \pm n}}$$

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m \pm n}}$$

Sæt til Ex. $a = 60$; $m = 2$; $n = 5$, saa findes $x = 30 \pm \sqrt{900 + \frac{7200}{9}} = \sqrt{900 - 800}$

$$x = 30 \pm \sqrt{100} = \begin{cases} 40 \\ 20 \end{cases}$$

§. 49.

7de Opgave. To Bønder A og B udsaaede i alt 24 Tønder Byg; A siger til B: naar enhver udsaaet Tønde giver mig saamange Tønder, som du har faaet, da høster jeg 135 Tønder. Hvormange Tønder har A og hvormange har B faaet?

Lad A have faaet $x$ Tønder, og følgelig B $24 - x$; vi have altsaa efter den anførte Betingelse Grundligningen

$$(24 - x)x = 135$$

$$24x - x^2 = 135$$

ordnet (§. 44) $x^2 - 24x = -135$

det manglende Led (§. 45) lægges til $12^2 = 12^2$

$$x^2 - 24x + 144 = 144 - 135 = 9$$

$$x - 12 = \pm\sqrt{9}$$

$x =$

$$x = 12 \pm 3 = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

A har altsaa faaet enten 15 eller 9 Tønder; i første Tilfælde har B faaet 9 og i sidste 15.

§. 50.

8de Opgave. At finde to Tal, hvis Produkt er 160 og hvis Qvadraters Forskiel er 156.

Lad os kalde det ene Tal $x$, det andet $y$, og de bekiendte Størrelser $160 = a$ og $165 = b$. Vi have da $xy = a$

og $x^2 - y^2 = b$.

Anvende vi nu Combinations-Methoden (§. 32),

saa finde vi $x = \frac{a}{y}$

af den første Ligning $x^2 = \frac{a^2}{y^2}$

af den anden $x^2 = y^2 + b$

deraf $y^2 + b = \frac{a^2}{y^2}$

$$y^4 + by^2 = a^2$$

$$(\tfrac{1}{2}b)^2 = (\tfrac{1}{2}b)^2$$

$$y^4 + by^2 + \tfrac{1}{4}b^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$y^2 + \tfrac{1}{2}b = \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}b \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$y = \sqrt{-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}}$$

Indsættes nu de givne Værdier for a og b, saa have vi $y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{25600 + 6084}}$

$$y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{31684}}$$

$$y = \sqrt{-78 \pm 178}$$

$$y = 10.$$

Vi havde $x = \dfrac{a}{y} = \dfrac{160}{10} = 16.$

Anm. Ved dette Problems Opløsning fik vi en høiere Ligning $y^4 + by^2 = a^2$; men ved at sammenligne Udtrykket $y^4 + by^2$ med den almindelige Form for Qvadrattallet af en binomisk Rod $(a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2$ sees let, at dette Udtryk er et ufuldkomment Qvadrattal af en Rod, hvis første Led er $y^2$ og det andet Led $\frac{1}{2}b$. Dette giortes til et fuldkomment Qvadrattal (§. 47) ved at lægge $\frac{1}{4}b^2$ til paa begge Sider; Roden blev derpaa udtrukket, og i Stedet for den tilsyneladende høiere Ligning fik vi en reen qvadratisk Ligning, der let opløstes.

Paa samme Maade kunde alle høiere Ligninger, hvor den ubekiendte Størrelse forekommer i to forskiellige Potenser, dog saaledes, at dens høieste Exponent er just det dobbelte af den laveste eller som ere af denne Form $x^{2m} \pm ax^m = b$, reduceres til rene qvadratiske Ligninger. Til Hvelse i at opløse saadanne Æqvationer vil jeg endnu anføre et Par Exempler.

§. 51.

§. 51.

9de Opgave. At finde to Tal, hvis Produkt er 16, og hvis Cubers Difference er 504.

Tallene være det større $x$, det mindre $y$, saa er $xy = 16$

$$x^3 - y^3 = 504.$$

Af den første Æqvation findes $x = \frac{16}{y}$ og $x^3 = \frac{4096}{y^3}$; denne Værdie substitueret i den anden Ligning (§. 33) faae vi

$$\frac{4096}{y^3} - y^3 = 504$$

deraf $4096 - y^6 = 504y^3$

ordnet $y^6 + 504y^3 = 4096$

tillagt $(252)^2 = (252)^2$

$$y^6 + 504y^3 + 63504 = 67600$$

$$y^3 + 252 = \pm\sqrt{67600}$$

$$y^3 = -252 \pm 260 = \begin{cases} +8 \\ -512 \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{\begin{matrix} +8 \\ -512 \end{matrix}} = \begin{cases} +2 \\ -8 \end{cases}$$

Vi havde $x = \frac{16}{y}$, altsaa $= \frac{16}{-8}$ v. $\frac{16}{2}$

følgelig $x = \begin{cases} -2 \\ +8 \end{cases}$



§. 52.

§. 52.

10de Opgave. Naar der gives to Tals Produkt $= a$ og deres Qvadraters Sum $= b$, da at finde Tallene selv.

Det større Tal være X, det mindre Y. Vi have da efter Betingelsen

$$y = a$$

$$x^2 + y^2 = b$$

af den første Ligning $x = \frac{a}{y}$ og ved Substitution

$$\left(\frac{a}{y}\right)^2 + y^2 = b$$

$$\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$$

$$a^2 + y^4 = by^2$$

$$y^4 - by^2 = a^2,$$

som er den (§. 50) anførte Form, der udfyldes til et fuldkomment Qvadrattal ved paa begge Sider at tillægge $(\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}b)^2$

vi faae da $y^4 - by^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - a^2$

og $y^2 - \frac{1}{2}b = \pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}$

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2}}$$

følgelig $= \dfrac{a}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}}}$

Sætte

Sætte vi $a = 24$; $b = 52$

saa er $y = \pm \sqrt{26 \pm \sqrt{676 - 576}}$

$y = \pm \sqrt{26 \pm \sqrt{100}}$

$y = \pm \sqrt{36}$ eller $\pm \sqrt{16}$

$y = \pm \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$

$x = \frac{24}{\pm 6}$ eller $\frac{24}{\pm 4} = \pm \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$

---

## IV. Om ubestemte Problemer, i hvilke de ubekiendte Størrelser skal udtrykkes ved hele bekræftende Tal.

§. 53.

Et Problem kaldes ubestemt, naar det indeholder flere ubekiendte Størrelser end der af dets Betingelser kan udledes Ligninger; og et saadant Problem kan da modtage utallige Opløsninger. For Ex. at finde to Tal, som samlede udgiøre 12.

Her findes to ubekiendte Størrelser $x$ og $y$, men kun een Grundligning, nemlig

$x + y = 12$

$x = 12 - y$

Man

Man antager i dette Tilfælde en vilkaarlig Værdie for den ene ubekiendte, som her $y = 1$, og vi faae da $x = 12 - 1 = 11$
Antages $y = 2$, findes $x = 10$, og saaledes naar $y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, findes $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 2, 1$. Saaledes have vi nu for dette Problem elleve Opløsninger; flere ere ikke muelige, naar de ubekiendte to Tal skal være hele og bekræftende. Ere derimod enten begge disse Betingelser eller og kun een af dem udeladte, da bliver Opløsningernes Antal uendeligt.

Anm. Udførlig at forklare den egne Opløsnings-Methode og de analytiske Kunstgreb, som bruges for at finde Værdierne af de ubekiendte Størrelser i ubestemte Problemer, hvor det er bestemt, at de søgte Størrelser skal være hele og positive Tal, er her efter min Plan ikke Sted til; kun for at give et Begreb derom vil jeg anføre et Par Exempler, og derved vise de vigtigste Regler. Udførligt og med megen Tydelighed findes disse Problemers Opløsning udviklet i Rahr's Veiledning i Algebra. Kiøbenh. 1802.

## §. 54.

1ste Opgave. En Myntmester har tre Slags Sølv, 15-, 11- og 9lødigt; deraf vil han forfærdige 48 Lod 13lødig Sølv. Hvor mange Lod skal han tage af hver Slags?

Lad

Lad ham af første Slags tage $x$, af andet $y$, og af tredie $z$ Lod, saa kan kun udledes to Ligninger, nemlig

1) $x + y + z = 48$

2) $15x + 11y + 9z = 48 \times 13 = 624$

da der er tre ubekiendte Størrelser og kun to Ligninger, er Problemet ubestemt (§. 53).

Ved Subtractions-Methoden (§. 33) naar Ligningen No. 1) multipliceres med Tallet 9, og derpaa subtraheres fra No. 2,

findes 3) $9x + 9y + 9z = 432$

og 4) $6x + 2y = 192$

deraf 5) $y = 96 - 3x$.

For $x$ antages nu en vilkaarlig Værdie; men skal saavel $x$ som $y$ og $z$ blive hele og bekræftende Tal, da er 24 det mindste og 32 det høieste Tal man kan antage for $x$; thi sættes $x = 23$, bliver, efter Ligning 4), $y = 27$, som er imod Ligningen 1), og saaledes ved enhver ringere Værdie for $x$; sættes derimod $x = 33$, bliver $y$, efter Ligningen 4), $= -3$ imod Betingelsen. Følgende Værdier kan altsaa finde Sted for $x$, $y$, $z$, hvorved alle Betingelser opfyldes.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 24, | 25, | 26, | 27, | 28, | 29, | 30, | 31, | 32 |
| $y =$ | 24, | 21, | 18, | 15, | 12, | 9, | 6, | 3, | 0 |
| $z =$ | 0, | 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12, | 14, | 16 |

§. 55.

2den Opgave. En Kiøbmand skylder til en anden 100 Rdlr; han vil afdrage denne Gield ved at levere tvende Slags Klæde. Alenen af det første Slags koster 7 Rdlr. og af det andet 9 Rdlr. Hvor mange Alen skal han levere af hver Slags?

Efter Betingelsen er Grundligningen

$7x + 9y = 100$, deraf

$y = \frac{100 - 7x}{9}$, og naar Divisionen

med 9 giøres virkeligt $y = 11 \frac{-7x + 1}{9}$

Skal nu $y$ være et heelt Tal, maae $\frac{-7x + 1}{9}$

ogsaa være et heelt Tal; man sætte det $= A$,

og have da $A = \frac{-7x + 1}{9}$ og $x = \frac{9A + 1}{7}$

$= A + \frac{2A + 1}{7}$ (A). Skal X være et heelt

Tal, maae $\frac{2A + 1}{7}$ ogsaa være et andet heelt

Tal; man sætte nu $\frac{2A + 1}{7} = B$, saa er

$A = \frac{7B - 1}{2} = 3B + \frac{B - 1}{2}$ (B). Frem-

deles-

deles sætter man $\frac{B - 1}{2}$ (der ogsaa maae være et heelt Tal) $= C$ og $B = 2C + 1$. Denne Værdie substitueres i Ligningen B, saa er $A = 2C + 3$; denne Værdie indsættes i Ligningen A, og vi faae $x = 9C + 4$. Skal nu $x$ og $y$ blive bekræftende og hele Tal, saa gives for C kun to Værdier 0 og 1, da

i første Tilfælde $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

i andet $\begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \end{cases}$ som er de to eeneste Opløsninger, Opgaven kan modtage; thi antages C nægtende, bliver X ogsaa nægtende imod Betingelsen; antages den $= 2$, bliver $x = 22$ og $y = - 6$, som ogsaa er imod det antagne.

Anm. At fremsætte flere Exempler paa ubestemte Problemer enten af dette Slags, eller med qvadratiske Ligninger, troer jeg efter min Plan ikke passende; kun de Ligninger, hvor den ubekiendte Størrelse forekommer som Exponent, og som ikke uden ved Logarithmer kan opløses, skal, naar Logarithmernes Theorie er fremsat, kortelig omtales.

---

## V. Videre Udførelse af Læren om geometriske Forhold og Proportioner.

(See Arithmet. §. 64-77.)

§. 56.

Ere fire Størrelser ($a, b, c, d$) geometrisk proportionale ɔ: $a:b = c:d$, saa forholder ogsaa

1) Summen eller Differencen af de eenstaaende Lede sig, som et foregaaende Leed til et efterfølgende ɔ: $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$.

Beviis. Efter Betingelser er $a \times d = b \times c$ (Arithm. §. 71), følgelig $a \times d + c \times d = b \times c + c \times d$ ɔ: $(a + c) d = (b + d) c$, følgelig (Arithm. §. 71. Till. 2) $a + c : b + d = c : d = a : b$.

Anm. For Differencen føres Beviset paa samme Maade, som for Summen.

2) Summen eller Differencen af de to første og de to sidste Leed, forholde sig som de to eenstaaende (homologe) Leed ɔ: $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$.

Beviis. Efter Betingelsen er $a \times d = b \times c$, følgelig $a \times d + b \times d = b \times c + b \times d$ ɔ: $(a + b)d = (c + d)b$, altsaa (Arithm. §. 71. Till. 2) $a + b : c + d = b : d = a : c$.

Anm. I begge disse Sætninger er Beviset ført ved at multiplicere begge de frembragte Produkter

med

med et treble, hvis tvende Faktorer ere tagne af de to Produkter, som ved Proportionen frembragtes, nemlig een af hvert.

§. 57.

**Ere i to Proportioner Exponenterne lige store, saa faaer man en rigtig Proportion, naar Ledene efter Ordenen adderes til eller subtraheres fra hinanden.**

Ex. Er $a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$

saa er $a + c : ma + mc = b + d : mb + md$

og $a - c : ma - mc = b - d : mb - md$

Beviis. I enhver af de givne Proportioner antages $m = m$, som er Exponenten; men den fundne Proportion kan forandret udtrykkes saaledes:

$$a + c : m(a + c) = (b + d) : m(b + d).$$

Exponenterne blive da ogsaa her $m = m$, og saaledes Proportionen rigtig.

Till. Er $a : b = c : d$

$e : f = c : d$

$g : h = c : d$

saa er $a + e + g : b + f + h = c : d$;

thi (§. 56) $a + e : b + f = 2c : 2d = c : d$

og $g : h = c : d$

følgelig $a + e + g : b + f + h = 2c : 2d = c : d$.

## §. 58.

Vil man angive en Størrelses Forhold til en anden, f. Ex. en Ducats til en Rigsort, saa kan man enten giøre det ligefrem (med eet) eller man angiver først Ducatens Forhold til en Rigsdaler, og derpaa Rigsdalerens Forhold til en Rigsort. Saaledes Ducat : Rigsdaler $=$ 1 : 2

Rigsdaler : Rigsort $=$ 1 : 4

Altsaa Ducat : Rigsort $=$ 1 : 8.

Man siger da, at Forholdet mellem Ducaten og Rigsorten er sammensat af Forholdene mellem Ducaten og Rigsdaleren, og mellem Rigsdaleren og Rigsorten, eller af Forholdene 1 : 2 og 1 : 4.

Exponenten i det sammensatte Forhold bliver stedse Produktet af Exponenterne i de enkelte Forholde.

$$\text{Ex.}\quad 24 : \overset{8}{3} = \begin{cases} 8 : \overset{4}{2} \\ 3 : \overset{3}{1\frac{1}{2}} \end{cases}$$

hvor Exponenten i Forholdet 24 : 3 er Produktet af Exponenterne i Forholdene 8 : 2 og 3 : $1\frac{1}{2}$. Skriftlig udtrykkes det som det nylig anførte eller og saaledes: $24 : 3 = (8 : 2) + (3 : 1\frac{1}{2})$.

Et

Et sammensat Forhold (ratio composita) kan undertiden være sammensat af tre, fire, og flere Forhold.

Er et Forhold mellem to Størrelser sammensat af to andre lige store Forhold, da siges det sammensatte Forhold at være dobbelt saa høit (ratio duplicata) som ethvert af de enkelte.

Ex. 36 er i et dobbelt saa høit Forhold til 4, som 6 : 2 og 216 : 8 i et tregange saa høit Forhold (ratio triplicata).

Till. 1. Qvadrattal ere i et dobbelt og Kubiktal i et tredobbelt Forhold af deres Rødder; Qvadratrødder derimod i et halvt saa høit (ratio subduplicata og Kubikrødder i et trediepart saa høit (subtriplicata) Forhold til hinanden, som deres Qvadrat- og Kubiktal.

Till. 2. Ophøies derfor alle fire Ledene i en geometrisk Proportion til den samme Potens, eller udtrækkes af dem alle den samme Rod, saa ere disse Potenser og Rødder ogsaa proportionale.

Ex. Er $a : b = c : d$

saa er $a^n : b^n = c^n : d^n$

thi Forholdet $a^n : b^n$ er $n$gange saa høit som Forholdet $a : b$, og ligeledes $c^n : d^n$ $n$gange saa høit som $c : d$.

Paa samme Maade indsees, at $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Till. 3. Forholdet mellem to Produkter er sammensat af Forholdet mellem deres Faktorer.

Ex. Er $mp : nq = a : c$

saa er $(m : n) + (p : q) = a : c$

---

## IV. Om arithmetiske Progresssioner eller Tal-Rækker.

### §. 59.

En fortsat sammenhængende arithmetisk Proportion (Arithmet. §. 65) kaldes en arithmetisk Progression (progressio arithmetica); den er voxende eller aftagende, eftersom Ledene tage til eller af.

Ex. paa en voxende: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

aftagende: 17, 14, 11, 8, 5, 2, 1.

Anm. Vore almindelige Tal i deres naturlige Orden udgiøre en voxende arithmetisk Tal-Række: 1, 2, 3, 4 ꝛc.

Till. Kalde vi i en arithmetisk Progression det første Leed $a$, Ledenes Antal $n$, det sidste

Leed

Leed $u$, og Ledenes Forskiel (som og kaldes Forholdsnavn) $d$, saa er den almindelige Form for en arithmetisk Progression følgende:

$$\overset{1}{a}.\ \overset{2}{a+d}.\ \overset{3}{a+2d}.\ \overset{4}{a+3d}.\ \overset{5}{a+4d}\ldots\overset{n}{u}$$

Anm. De overskrevne Tal kaldes Angivere (indices), og tilkiendegive Ledets Tal i Rækken. Lægges nu Mærke til disse Angivere, saa sees, at det andet Leed er $a+d$, det tredie Leed $a+2d$, og saaledes ethvert Leed i Rækken at bestaae af det første Leed $a$ og Differencen taget saa mange Gange, som Ledenes Antal mindre end een. F. Ex: Det femte Leed at være $= a+4d$, og følgelig det sidste eller $n$ Leed $u = a+(n-1)d$. En af $n$ Leed bestaaende Række kunde altsaa saaledes udtrykkes:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{n-2}{a+(n-3)d},\ \overset{n-1}{a+(n-2)d},\ \overset{n}{a+(n-1)d}.$$

§. 60.

Læresætn. I enhver arithmetisk Tal-Række er Summen af de to yderste Lede $a+u$ ligestor med Summen af ethvert Par Leed i Rækken, der staae begge ligelangt fra de yderste, og, i Tilfælde at Ledenes Antal er ulige, ligestor med det dobbelte af det midterste Leed.

Beviis. De givne Leed i Rækken være $P$ og $Q$, deres Afstand, nemlig $P$ fra første Leed og $Q$ fra sidste Leed, være $r$, saa er efter den almindelige Form (§. 59) $P = a+(r-1)d$ og $Q =$

$u-(r-1)d$, følgelig $P+Q=a+(r-1)d+u-(r-1)d=a+u$. Ved et ulige Antal Leed lad $M$ være det mellemste, som da er ligelangt fra det første og sidste, og følgelig $M+M=a+(r-1)d+u-(r-1)d=a+u$.

§. 61.

1ste Opgave. At finde Summen af en arithmetisk Progression.

Opløsn. Summen af det første og sidste Leed multipliceres med Ledenes halve Antal; kaldes altsaa Summen $S$, saa er efter de anførte Benævnelser $S=(a+u)$. $\frac{1}{2}n=\frac{n\,(a+u)}{2}$.

Beviis I. Er $n$ Ledenes Antal, saa er $\frac{1}{2}n$ Antallet af Parrene, men ethvert Par er liig $a+u$ (§. 60), altsaa $\frac{1}{2}n$ Par liig $\frac{1}{2}n(a+u)$.

Beviis II. Er ethvert Par Leed $=a+u$, saa kan man forestille sig ethvert enkelt Leed $=\frac{a+u}{2}$, følgelig, naar den er $n$ Leed, den hele Summa $=n\times\frac{a+u}{2}=\frac{1}{2}n\,(a+u)$.

Till. 1. Indsætte vi i Udtrykket $s=\frac{1}{2}n(a+u)$ Værdie for $u=a+(n-1)d$ (§. 59), saa faae vi

vi $s = \frac{1}{2}n\,(a + a + (n - 1)d) = \frac{1}{2}n$ $(2a + (n - 1)d)$.

Till. 2. Disse for $u$ og $s$ fundne Værdier ere Grundligninger i den hele Lære om arithmetiske Progressioner; da nu stedse to ubekiendte Størrelser ved to Ligninger kan bestemmes, saa behøves af disse fem Størrelser, $a$, $d$, $n$, $u$ og $s$, kun de tre at være givne, da de to manglende ved de anførte Ligninger kan findes. Lad f. Ex. $s$, $a$ og $u$ være givne; man skal finde $n$ og $d$.

Vi have $s = \frac{1}{2}n\,(a + u)$

deraf $\frac{2s}{a + u} = n$

og da $u = a + (n - 1)d$, saa er

$\frac{u - a}{n - 1} = d$; indsættes heri den for $n$

fundne Værdie, faae vi $d = \dfrac{u - a}{\frac{2s}{a + u} - 1} =$

$\dfrac{u^2 - a^2}{2s - (a + u)}$

Anm. Da af fem Størrelser tre kan tages paa ti forskiellige Maader, saa finder her ti forskiellige Opgaver Sted, hvori stedse to Størrelser bestemmes ved de tre andre. Man erholder ved disse ti Opløsninger tyve forskiellige Værdier, som for enhver af

de fem Størrelser giver fire forskiellige Bestemmelser. Disse tyve Former, hvis Udvikling overlades til det mundtlige Foredrag, kunde i en Tabel saaledes ordnes:

| givne Størrelser | søgte | Formerne. |
|---|---|---|
| u d n | a | $a = u - d - dn = u - (n-1)d.$ |
| u n s | | $a = \frac{2s}{n} - u$ |
| n d s | | $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{u^2 + ud + \frac{1}{4}d^2 - 2ds}$ |
| d n s | | $a = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}$ |
| a u n | d | $d = \frac{u - a}{n - 1}$ |
| a n s | | $d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$ |
| a u s | | $d = \frac{u^2 - a^2}{2s - (a + u)}$ |
| u n s | | $d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$ |
| a u d | n | $n = 1 + \frac{u - a}{d}$ |
| a u s | | $n = \frac{2s}{a + u}$ |
| a d s | | $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}}$ |
| u d s | | $n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} \pm \sqrt{\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}}$ |

| givne Størrelser | søgte | Formerne. |
|---|---|---|
| $a$ $d$ $n$ | $u$ | $u = a + (n - 1)d$ |
| $a$ $n$ $s$ | | $u = \frac{2s}{n} - a$ |
| $a$ $d$ $s$ | | $u = -\frac{1}{2}d + \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}$ |
| $d$ $n$ $s$ | | $u = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$ |
| $a$ $u$ $n$ | $s$ | $s = \frac{1}{2}n\ (a + u) = \frac{ar + un}{2}$ |
| $a$ $d$ $n$ | | $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$ |
| $a$ $d$ $u$ | | $s = \frac{a + u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d}$ |
| $u$ $d$ $n$ | | $s = \frac{2un + dn - dn^2}{2}$ |

§. 62.

2den Opgave. 1) At finde Summen af alle naturlige Tal fra 1 til 100.

Her er $a = 1$. $u = n = 100$, følgelig efter Formen $s = (a + u) \times \frac{1}{2}n$. $s = (1 + n) \times \frac{1}{2}n = \frac{n \times (n + 1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2}$

$= \frac{10100}{2} = 5050.$

2) At finde det $n$te ulige Tal fra 1 og Summen af de $n$første ulige Tal.

Her er $a = 1$, $d = 2$, følgelig $u = 1 + (n - 1)2 = 2n - 1$. og $s = (1 + 2n - 1) \times \frac{1}{2}n = 2n \times \frac{1}{2}n = n^2$. ɔ: Qvadrat-Tallet af Ledenes Antal, hvoraf Rækken af ulige Tal fra 1 bestod, er liig Summen af den hele Række. Saaledes f. Ex. $1 + 3 = 2^2$. $1 + 3 + 5 = 3^2$.

Till. 1. Vi fandt det $n$te ulige Tal $u = 2n - 1$; altsaa det $(n + 1)$te $= 2n + 1$ (da Differencen i en Række af de naturlig ulige Tal er 2) og det $(n - 1)$te $= 2n - 3$.

Till. 2. Er Qvadratet af et heelt Tal $n^2$ givet, da findes Qvadratet af det næstfølgende hele Tal $(n+1)^2$, naar man til det givne Qvadrat $n^2$ adderer det næstfølgende ulige Tal; thi Differencen imellem $n^2$ og $(n+1)^2$ er $2n+1$ (Arithm. §. 55. Till 3), men det $(n+1)$te ulige Tal er (Till. 1) $= 2n + 1$.

Ex. Lad være $n = 112$, saa er det ~~$n$te~~ (n+1)te ulige Tal $2 \times 112 + 1 = 225$. Veed man nu, at $112^2 = 12544$, saa er $113^2 = 12544 + 225 = 12769$.

Anm. Herefter kan let forfærdiges Tabeller over Qvadrattal.

§. 63.

3die Opgave. For at grave en Brønd accorderes saaledes, at den første Fods Dybde beta-

betales med 3 Mk., den anden med 6 Mk., den tredie med 9 Mk. o. s. v. Naar nu Brønden bliver 32 Fod dyb, hvad koster den da at grave?

Opløs. Det sees let, at det er den fundne Form for $s$, som her skal bruges. Var Spørgsmaalet om, hvad den sidste Fod kostede at grave, skulde Formen for $u$ være benyttet. Her er $a = d = 3$, $n = 32$; altsaa efter den anførte Form $u = a + (n - 1)a = na$, følgelig $s = (a + na) \times \frac{1}{2}n = (n + 1)a \times \frac{1}{2}n = 33 \times 3 \times 16$ Mark $= 1584$ Mark $= 264$ Rdlr., som er hvad den kostede at grave.

## §. 64.

4de Opgave. Imellem to givne Størrelser $a$ og $u$ at finde et vist Antal $= m$ af arithmetiske Mellemproportional-Tal.

Opløsn. Det første og sidste Leed af en bestemt Række ere her givne $a$ og $u$, Ledenes Antal ligeledes, thi det bliver her $m + 2$ (de søgte Tal ere $= m$, og dertil lægges det første og sidste Leed); altsaa er $n = m + 2$ og $n - 1 = m + 1$; Ledenes Forskield $d$ er det som søges: denne findes efter Formen $d = \frac{u - a}{n - 1}$ (§. 62), naar istedet for $n - 1$ substitueres den derfor fundne Værdie $m + 1$, og vi faae $d = \frac{u - a}{m + 1}$.

Ex.

Ex. Imellem 5 og 59 søges sex arithmetiske Mellemproportional-Tal, saa er $a = 5$, $u = 59$, $m = 6$, og vi finde $d = \frac{59 - 5}{6 + 1} = \frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}$, og Progressionen bliver 5. $12\frac{5}{7}$. $20\frac{3}{7}$. $28\frac{1}{7}$. $35\frac{6}{7}$. $43\frac{4}{7}$. $51\frac{2}{7}$. 59.

Anm. Læren om arithmetiske Tall-Rækker er i det hele ikke af megen Vigtighed, og heller ikke giøres der synderlig Anvendelse deraf i det følgende.

---

## VII. Om geometriske Progressioner og Tal-Rækker.

§. 65.

Forkl. En fortsat sammenhængende geometrisk Proportion (Arithmet. §. 70) kaldes en geometrisk Progression eller Tal-Række; den kan være voxende eller aftagende, eftersom det følgende Leed er et Produkt eller Qvotient af det næst foregaaende og Forholds-Exponenten, (det Tal, som angiver hvormangt Gange det efterfølgende Leed er større eller mindre end det foregaaende).

Till. 1. Kaldes det første Leed i saadan en Række $a$, det sidste Leed $u$, Forholds-Exponenten $m$, da er den almindelige Form for en saadan Række følgende:

$a^{1}$ $am^{2}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $a$ | $am$ | $am^2$ | $am^3$ | $am^4$ | $am^5$ |

| $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
| --- | --- | --- |
| $am^{n-3}$ | $am^{n-2}$ | $am^{n-1}$. |

Anm. De ovenskrevne Tal kaldes Angivere, og vise Ledenes Antal.

Till. 2. Ved at betragte den anførte Form, sees, at hvert Leed i Rækken er et Produkt af det første Leed og Forholdsnavnet ophøiet til en Potens, hvis Exponent er Ledets Tal mindre end een; saaledes er fierde Leed $am^3$, femte Leed $am^4$, og det almindelige eller $n$te Leed $u = am^{n-1}$.

Till. 3. Ere $N$ og $R$ to virkelige Leed i en saadan Række, hvis Afstand fra hinanden er $r$, saa er $R = Nm^{r-1}$, og følgelig $N = \frac{R}{m^{r-1}}$.

Till. 4. Fire Leed i en saadan Række, $P$. $Q$. $N$. $R$., hvoraf de to og to have samme Afstand $r$ fra hinanden, udgiøre en geometrisk Proportion; thi (Till. 3) $Q = Pm^{r-1}$ og $R = Nm^{r-1}$; følgelig $P : Pm^{r-1} = N : Nm^{r-1}$; som er en rigtig geometrisk Proportion (Arithm. §. 70.)

Till. 5. Er $m$ et heelt Tal eller en uegentlig Brøk, saa faaer man en voxende Række; er $m$ derimod en egentlig Brøk, faaer man en aftagende

Till.

Till. 6. Divideres ethvert Leed i en saadan Række med det første Leed eller $a$, faaer man stedse en Række, hvis første Leed er 1, og de øvrige Leed Potenser af Forholdsnavnet $m$. Den anførte Form $a, am, am^2, am^3, am^4$ forvandles da til følgende: $1, m, m^2, m^3, m^4$ ꝛc.

§. 66.

Læresætn. I enhver geometrisk Progression er Produktet af første og sidste Leed $au$ ligestort med Produktet af tvende fra hine ligelangt værend Lede $P\,Q$, og, naar Ledenes Antal i Rækken ere ulige, ligestort med Qvadratet af det midterste Leed $M$.

Beviis. Formedelst den lige Afstand er $a : P = Q : u$ (§. 65 Till. 4.) og $a : M = M : u$, følgelig $au = P\,Q$ og $au = M^2$ (Arithm. §. 71 og Till.)

Anderledes. Den lige Afstand af $P$ og $Q$ fra $a$ og $u$ være $r$, saa er $P = a \times m^{r-1}$ og

$$Q = \frac{u}{m^{r-1}}$$ (§. 65 Till. 3), følgelig $P \times Q$

$$= a \times m^{r-1} \times \frac{u}{m^{r-1}} = au.$$

## §. 67.

1ste Opgave. At finde Summen (som vi vil kalde $s$) af alle Ledene i en geometrisk Progression.

Opløsn. Efter den anførte Form (§. 64 Till. 1) er $s = a + am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1}$; multipliceres nu begge Sider af Ligningen med $m$, saa er $ms = am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1} + am^n$; subtraheres den øverste Ligning fra den nederste, faae vi $ms - s = am^n - a$

og $(m-1)s = am^n - a$

$$s = \frac{am^n - a}{m-1} = \frac{(m^n - 1)a}{m-1}$$

Nu er $u = am^{n-1}$

og $mu = am^n$

indsættes nu i Værdien for $s$, $mu$ for $am^n$, saa er $s = \frac{mu - a}{m - 1}$.

Anm. Efter Formen $s = \frac{am^n - a}{m-1}$ findes Summen uden at det sidste Leed eller $u$ er bekiendt; er derimod $u$ (det sidste Leed) bekiendt, bruges beqvemmest Formen $s = \frac{mu - a}{m-1}$.

Till. 1. Efter denne Form findes Summen saavel af voxende som aftagende Rækker. Lad

være

være f. Ex. $a = 1$, $m = 3$ og $u = 729$, og altsaa Rækken voxende, saa er $s = \frac{3 \times 729 - 1}{3 - 1}$

$= \frac{2187 - 1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093$. Var derimod $a = 629$, $u = 1$, $m = \frac{1}{3}$, og saaledes Rækken aftagende, saa er $s = \frac{\frac{1}{3} \times 1 - 729}{\frac{1}{3} - 1}$

$= -\frac{2168}{3} : -\frac{2}{3} = \frac{-2186}{-2} = +1093$.

Till. 2. Til Øvelse og Anvendelse af den fundne Form for Summen af en geometrisk Talrække kan søges Antallet af de Korn, som Opfinderen af Skakspillet siges at have udbedet sig til Belønning; nemlig eet Korn for det første Tavl paa Skakbrettet, 2 for det andet, 4 for det tredie o. s. fr. for ethvert følgende af de 64 Tavl dobbelt saa mange som for det foregaaende; her er $a = 1$, $m = 2$, $n = 64$, og $s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} =$ $2^{64} - 1$, som, naar det enten opsøges i Tavler eller beregnes ved Logarithmer (hvorom i det Følgende), udgiør den uhyre Summe 1,8446744,0737955,1616, der igien kan udregnes i Tønder og Skieppet, naar man blot veed, hvor mange Korn der indeholdes i et vist Maal.

§. 68.

## §. 68.

Ligesom ved den arithmetiske Progression (§. 61) har man ogsaa her fem Størrelser og to Fundamental-Ligninger, nemlig $u = am^{n-1}$ og $s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{mu - a}{m - 1}$, altsaa kan ogsaa her forekomme ti Opgaver af tre givne at finde to ubekiendte Størrelser. Saaledes findes af Ligningen $u = am^{n-1}$, at $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ og af Ligningen $s = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1}$, findes $a = \frac{(m-1)s}{m^n - a}$; men disse for $m$ og $a$ fundne Værdier vilde ved de hidtil lærte Regnings-Methoder meget vanskelig kunde udtrykkes i Tal, naar $n$ er et nogenlunde høit Tal.

Till. Ligesom i den arithmetiske Progression findes her ogsaa 20 Former for de fem Størrelser, der, ligesom de for den arithmetiske, kunde ordnes i en Tavle; men da nogle af dem ere meget sammensatte, og nogle ikke kan findes uden ved høiere Ligninger (hvorom jeg ikke troer det passende her at handle), vil jeg ikke hensætte dem, men kun ved et Par Exempler vise deres Anvendelse.

§. 69.

2den Opgave. En indsætter i Tallotteriet 8 Sk., og foretager sig at fordobble sin Indsats i ti Trækninger; nu spørges: hvor meget maae han indsætte tiende Gang?

Opløsn. Her er $a = 8$, $m = 2$, og $n = 10$; efter Formen $u = am^{n-1}$ findes her hans sidste Indsats eller $u = 8 \times 2^9 = 8 \times 512 = 4096$ Sk. $= 42$ Rd. 64 Sk.

Anm. Flere Exempler kan let tilføies ved det mundtlige Foredrag; f. Ex.: naar den første Rude i et Vindue, der har 16 Ruder, koster 4 ß., og det stedse fordobles, hvad koster den sidste, og hvad koster hele Vinduet, o. a. f.

§. 70.

3die Opgave. Imellem tvende givne Størrelser $a$ og $u$ at finde et vist Antal $= r$ Mellemproportional-Tal i en geometrisk Række.

Opløsn. Man søger først Forholdsnavnet i Rækken efter den (§. 68) anførte Form $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; thi $a$ og $u$ ere givne, $n$ er ogsaa bekiendt, thi Ledene i hele Rækken maae blive de søgte Mellemproportional-Tal tilligemed det første og sidste (ↄ: naar der søgtes tre Mellemproportional-Tal, bliver $n = 5$), og saaledes $n = r + 2$, følgelig $n - 1 = r + 1$, altsaa $m = \sqrt[r+1]{\frac{u}{a}}$.

Lad

Lad f. Ex. 1) forlanges at finde tre Mellem-proportional-Tal imellem 10 og 160. Her er $a = 10$, $u = 160$, og $r = 3$; man finder da $m = \sqrt[4]{\frac{160}{10}}$, $m = 2$, og Progressionen findes at være 10 — 20 — 40 — 80 — 160.

2) Imellem 1 og 2 at indsætte elleve Leed saaledes, at alle tretten Leed udgiøre en geometrisk Progression. Her er $a = 1$, $u = 2$ og $r = 11$; altsaa $m = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$. (Denne Rod kan ikke findes uden ved Logarithmer, hvorom nu strax skal handles).

§. 71.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig Række, hvis Forholdsnavn er en egentlig Brøk.

Opløsn. Lad det første Leed være $a$, Forholdsnavnet den egentlige Brøk $\frac{b}{c}$, saa er

$$1)\ s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots \text{uendelig,}$$

multipliceres nu med $\frac{b}{c}$ paa begge Sider har vi

$$2)\ \frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} \ldots \text{naar}$$

denne Ligning subtraheres fra første findes

$s$ —

$$s - \frac{b}{c} s = \left(1 - \frac{b}{c}\right) s = a$$

$$s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}$$

Till. 1. Vare Tegnene i Rækken afvexlende, saa bliver 1) $s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} \ldots\ldots$ uendel.

2) $\frac{b}{c} s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots\ldots$ uendelig.

1 og 2 adderes, saa er $\left(1 + \frac{b}{c}\right) s = a$ og

$s = \frac{ac}{c + b}$.

Anm. De her for uendelige Rækker fundne Summer kunde ogsaa udledes af den almindelige Form $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ (§.67), kun at der bemærkes, at $mu = 0$ (da det sidste Leed er en uendelig lille Størrelse), og at, naar Ledene i Rækken have afvexlende Tegn, man anseer det som to Rækker og søger Summen af den positive og negative Række hver for sig, og derpaa subtraherer dem fra hinanden.

Till. 2. Sættes det første Leed i en saadan Række = Forholdsnavnet = $\frac{1}{x}$, da er $s = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \ldots\ldots$ uendelig og $s =$

$\frac{\frac{1}{x}}{1-x} = \frac{1}{x-1}$, og for afvexlende Tegn $s = \frac{1}{x+1}$ (Till. 1.)

Anm. Sammenlignes dette Udtryk med den almindelige Form, saa sees, at det skulde hedde for enhver Progression $s = (1-u)\frac{1}{x-1}$. Men ved en uendelig Række bliver $u$ en uendelig lille Størrelse $= 0$; Coefficienten $1-0$ bliver saaledes $= 1$, og bortfalder.

Till. 3. Paa Grund heraf lade Talrækker af denne Art sig let summere; f. Ex. denne Række: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ Her er $x = 2$., $a = \frac{1}{32}$, og $s = (1 - \frac{1}{32}) \times \frac{1}{2-1} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

Exempel paa en uendelig Række med afvexlende Tegn: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ uendel. Her er (Till. 1) $s = \frac{ac}{c+b} = \frac{1 \times 2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

Efter Formen $s = \frac{1}{x-1}$ er Summen af uendelige Række $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ꝛc. i det uendelige; saaledes $= s = \frac{1}{2-1} = 1$. For

Rækken $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots$ uendelig er $s = \frac{1}{3 - 1}$ $= \frac{1}{2}$.

(Sammenlign Arithm. §. 46 om de ved Division frembragte Tal-Rækker.)

§. 72.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig aftagende Række, hvis Forholdsnavn $m = x + 1$ og hvis første Leed $a = \frac{x}{x+1}$ og som vilde udtrykkes saaledes: $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^4} + \ldots \ldots \frac{x}{(x+1)^{\infty}}$

Opløsn. For at finde denne Summa, inverteres eller omsættes Rækken saaledes: $\frac{x}{(x+1)^{\infty}} \ldots + \frac{x}{(x+1)^4} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)}$ Vi faae da en tiltagende geometrisk Række, hvis Forholdsnavn $m = (x + 1)$ det første Leed $a = \frac{x}{(x+1)^{\infty}} = 0$, det sidste Leed $u = \frac{x}{x+1}$;

alt-

altsaa efter Formen $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ er her $s =$

$$\left(\frac{x}{x+1} \times (x+1) - \frac{x}{(x+1)^{\infty}}\right) : (x+1)$$

$- 1 = \frac{x - 0}{x} = \frac{x}{x} = 1$. Sætte vi til Exempel $x = 1$, saa er Rækken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ uendel. $= 1$.

Till. Ved at forvandle en simpel Brøk til en Decimal-Brøk (Arithm. §. 48) har man erholdt følgende Udtryk: 0,575757 .... i det Uendelige. Hvad har vel den forvandlede Brøk været?

Da $0{,}575757\ldots$ er $= \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000} + \ldots \frac{57}{\infty}$, saa er den (§. 72) $= \frac{57}{100^{\infty}} \ldots + \frac{57}{100^3} + \frac{57}{100^2} + \frac{57}{100}$, og følgelig Brøken $s = (\frac{57}{100} \times 100 - \frac{57}{100^{\infty}}) : 99 = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$.

---

# VIII. Om Logarithmer og Logarithme-Tavler, samt deres Brug.

## §. 73.

Forkl. Naar een og samme Rodstørrelse $a$, der maae være positiv og større end 1, ophøiet efterhaanden til forskiellige Potenser, hvis Exponenter ere $m$, $n$, $o$, $p$, $q$ ꝛc., frembringer Størrelserne $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ ꝛc., saa kaldes Exponenterne $m$, $n$, $o$, $p$, $q$, $r$, Logarithmer til Størrelserne $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. Saaledes at naar $a^m = b$, $a^n = c$, $a^o = d$ o. s. fr., saa kaldes $m$ Logarithmen til $b$, $n$ Logarithmen til $c$, $o$ Logarithmen til $d$, hvilket skriftlig udtrykkes saaledes: $m = \text{Log.}\,b$, $n = \text{Log.}\,c$ o. s. f. F. Ex. $2^1 = 2$. $2^2 = 4$, $2^3 = 8$; altsaa $1 = \text{Log.}\,2$ $2 = \text{Log.}\,4$. $3 = \text{Log.}\,8$ o. s. fr.

Anm. Man finder forskiellige Forklaringer paa Logarithmer efter det forskiellige Sted i Systemet, hvor Logarithmernes Theorie afhandles. Saaledes findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger Logarithmerne afhandlet i Arithmetiken, uden foregaaende Kundskab om Bogstav-Regning; saaledes, at en arithmetisk og geometrisk sammenhængende Proportion eller Tal-Række, Leed for Leed skrevne under eller ved Siden af hinanden, udgiøre et Logarithme-System, da Tallene i den arith-

arithmetiske Række blive Logarithmer for de dertil svarende i den geometriske Række. Uagtet Logarithmerne efter denne Theorie let og fattelig lade sig forklare, har jeg dog hellere villet holde mig til den her anførte mere almindelige Forklaring, som jeg paa dette Sted ikke troer at kunne være utydelig.

Till. 1. Opsætte vi en saadan Række, hvor samme Rod udtrykt i Tal er ophøiet til forskiellige Potenser, saa sees, at Exponenterne blive Tallene i deres naturlige Orden, der altid udgiøre en arithmetisk Tal-Række (§. 58 Arithm.), da de fremdragte Tal derimod udgiøre en geometrisk Tal-Række (§. 11 Till. 2); f. Ex. $2^0$, $2^1$. $2^2$, $2^3$, $2^4$ er

Potenserne 1, 2, 4, 8, 16

Exponenterne ere 0 1 2 3 4

Og saaledes ere ogsaa efter den anførte Forklaring Logarithmerne Leed i en arithmetisk Progression, naar Tallene, hvis Logarithmer de ere, ere Leed i en geometrisk Progression.

Till. 2. Betragte vi de i forrige Tillæg anførte Rækker, saa da 1 : 2 = 2 : 4 og 2 : 4 = 4 : 8, saa er 1 : 4 = 2 (1 : 2) og 1 : 8 = 3 (1 : 2) o. s. v. (§. 58). Logarithmerne (her Tallene 2, 3) kan saaledes ogsaa siges at tilkiendegive hvormange Gange ethvert Forhold i Rækken er høiere end Grundforholdet, som her er 1 : 2 (hvortil ellers kan vælges ethvert vilkaarligt Forhold)

Navnet Logarithme (λογων αριθμος ɔ: Forholdenes Antal) viser ogsaa denne Logarithmernes første oprindelige Bemærkelse.

Till. 3. Den Størrelse, der, ophøiet til forskiellige Potenser efter den anførte Forklaring, giver Tallene, hvortil Potens-Exponenterne ere Logarithmer; kaldes Grundtallet for Logarithme-Systemet; dets Logarithme er alletider = 1 og Logarithmen for 1 = 0, da ethvert Tal i 0 Potens er = 1. I det anførte Exempel er 2 Grundtallet, dets Logarithme = 1.

§. 74.

Hvad enten vi nu vil ansee Logarithmerne som Exponenter efter den givne Forklaring (§. 72) eller som Forholds-Tal (§. 73. Till. 2), saa sees let, at ethvert Grundtal eller Grundforhold lader sig i det Uendelige saavel formere som formindske; saaledes i det anførte Exempel, hvor 2 er Grundtallet, formeeres det saaledes: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ tc.

$= 1, 2, 4, 8, 16$ x.

formindskes: $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$ x.

(§. 10. Till. 3) $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ x.

Her er Log. 1 = 0, Log. $\frac{1}{2} = -1$, Log. $\frac{1}{4} = -2$ x.

Opsættes nu disse fundne Logarithmer og de dertil svarende Tal saaledes: $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$

Logarith. $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$,

da

da sees, at den øverste Rad er en geometrisk Række, hvis Forholds-Exponent er 2, og den underste eller Logarithmerne en arithmetisk, hvis Forholdsnavn er 1. (§. 73. Till. 1).

Till. 1. Ved at søge Mellemproportional-Tal mellem ethvert Par af disse Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Række (Arithm. §. 73) og igien mellem de fundne i det Uendelige, maae der findes uendelig mange Mellemproportional-Tal imellem 1 og 2, 2 og 4, 4 og 8 x., og iblandt disse maae og findes alle de hele Tal, der falde imellem ethvert Par af disse Tal, eller i det mindste Tal der nærmer sig saa meget til dem, at Feilen er umærkelig; hvorved altsaa Logarithmerne til alle disse Mellem-Tal lade sig finde.

Till. 2. Har man for et antaget Grundforhold fundet Logarithmerne for Tallene i deres naturlige Orden, saa faldes det Hele et Logarithme-System, hvoraf der følgelig gives utallige, da man kan antage utallige Grundtal eller Grundforhold.

## §. 75.

Læresæt. Logarithmen til ethvert Produkt er Summen af Faktorernes Logarithmer, og Logarithmen til enhver Qvotient er Forskiellen imellem Dividendens og Divisors Logarithmer.

Beviis.

Beviis 1) Lad i et Logarithme-System, hvis Grundtal er $a$, $p$ være $= a^m$ og $q = a^n$, følgelig (§. 73) $m =$ Log. $p$ og $n =$ Log. $q$, saa er $pq = a^m \times a^n = a^{m+n}$ (§. 10), altsaa $m + n =$ Log. $pq$; men nu var $m =$ Log. $p$ og $n =$ Log. $q$, følgelig Log. $p$ + Log. $q$ = Log. $pq$. For Ex. da $2 \times 8 = 16$, saa er og Log. 2 + Log. 8 = Log. $(2 \times 8)$, nemlig $1 + 3$ = Log. 16 = 4. (§. 74)

2) Sæt ligeledes $\frac{p}{q} = a^m : a^n = a^{m-n}$ (§. 11) og Log. $\frac{p}{q}$ = Log. $a^{m-n} = m - n$ = Log. $p$ — Log. $q$. For Ex. Log $\frac{8}{2}$ = Log. 8 — Log. 2 $= 3 - 1 = 2$ = Log. 4.

Till 1. Denne Sætning er ogsaa rigtig, naar et Produkt bestaaer af flere end to Factorer; saaledes er Log. $pqr$ = Log. $p$ + Log. $q$ + Log. $r$; thi sæt $qr = x$ Log. $pqr$ = Log. $px$ = Log. $p$ + Log. $x$; nu er Log. $x$ = Log. $qr$ = Log. $q$ + Log. $r$, altsaa Log. $pqr$ = Log. $p$ + Log. $q$ + Log. $r$.

Till. 2. Ere ved Divisionen $m$ og $n$ positive Tal og $m > n$ (Dividendens Logarithme større end Divisors), saa er og $(m - n)$ et positiv Tal og $\frac{p}{q} > 1$. Logarithmer for alle Tal, der ere

større

større end Eenheden, ere derfor positive. (§. 73).

Till. 3. Er $m = n$, saa er $(m-n) = 0$ og $\frac{p}{q} = 1$, da $a^{m-n} = \frac{p}{q} = a^0 = 1$ (§. 11 Till. 2). Logarithmen for Eenheden er derfor alletider $= 0$.

Till. 4. Er $m > n$; saa er $(m-n)$ en nægtende Størrelse, og $\frac{p}{q}$ en egentlig Brøk. Logarithmerne til egentlige Brøk ere derfor altid nægtende Størrelser (§. 74).

## §. 76.

Læresæt. Logarithmen til enhver Potens findes, naar Rodens Logarithme multipliceres med Potensens Exponent; og Logarithmen til enhver Rod, naar Potensens Logarithme divideres med Rod-Exponenten.

Beviis 1. Er $a^m = p$, saa er ogsaa $(a^m)^x = p^x$, altsaa (§. 12) $= a^{m \times x} = p^x$, følgelig $x \times m =$ Log. $p^x$; men nu er $m =$ Log. $p$ (§. 73), og saaledes $x \times$ Log. $p =$ Log. $p^x$. F. Ex. Log. $2^3 = 3 \times$ Log. $2 = 3 \times 1 = 3$.

2. Da vi antog $a^m = p$, saa er ogsaa $\sqrt[x]{a^m} = \sqrt[x]{p}$

og (§. 14) $a^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{p}$; følgelig $\frac{m}{x} =$ Log. $\sqrt[x]{p}$ (§. 73), men $m =$ Log. $p$, altsaa $\frac{\text{Log. } p}{x} =$ Log. $\sqrt[x]{p}$. F. Ex. efter det anførte System er Logarithmen til Cubikroden af 8 $= \frac{\text{Log. } 8}{3} = \frac{3}{3} = 1$, som er Logarithmen til 2, der er Cubikroden af 8.

Till. 1. Lad et givet Tal $N = n^y$, saa er Log. $N = yx$ Log. $n$ (§. 76) og $\frac{\text{Log. } N}{\text{Log. } n} = y$ (§. 22) d. e. man finder Exponenten $y$ til en Potens naar man dividerer Logarithmen til Potensen $N$ med Logarithmen til Roden $n$.

Till. 2. Ved Hielp af Logarithmerne skeer, i Følge de nu forklarede Gærninger, al Multiplication og Division med Tal, ved at addere og subtrahere, og man undgaaer saaledes den ved Tal, som bestaae af mange Cifre, vidtløftige og keedsomme Multiplication og Division; som og den endnu besværligere Rod Extraction. Logarithmer ere saaledes for store Regninger overmaade beqvemme, men aldeles uundværlige, naar, som i 1ste Tillæg, et Tal $N$ gives ligestort med et andet Tal $n$, ophøiet til en ubekiendt Værdighed, hvis Exponent er $y$, og Exponenten $y$ søges.

§. 77.

§. 77.

For at beregne Logarithmer til alle naturlige Tal, behøver man allene at sætte: $a^m = 2$, $a^n = 3$, $a^o = 5$, $a^p = 7$, $a^q = 11$, og $a^u = 199991$, og derefter beregne Værdien for Størrelserne $m$, $n$, $o$, $p$ ꝛc., saa faaer man Logarithmerne for alle Primtal fra 1 til 100000; og af disse Logarithmer kan Logarithmerne for alle de øvrige mellemliggende Tal findes ved blot Addition, da alle sammensatte Tal ere ved Multiplication frembragte af de enkelte (Prim) Tal. Indfører man disse Logarithmer i en ordentlig Tavle eller Tabelle og sætter dem ligeover for de dertil hørende Tal, saa faaer man en meget beqvem Tavle, ved hvis Hielp man kan erholde den (§. 76 Till. 2) omtalte Fordeel. Disse Værdier for $m$, $n$, $o$ ꝛc. kunde ved uendelige Tal-Rækker lettest beregnes; men denne Maades Forklaring ligger udenfor denne Bogs bestemte Grændse, og nævnes derfor kun.

Anm. De paa denne Maade søgte Logarithmer (naar Modellen, det er, det almindelige Tal, hvormed de fundne Logarithmer multipliceres, antages = 1) kaldes naturlige eller hyperboliske (Anledningen til det sidste Navn kan her endnu ikke forklares) Logarithmer, og som ikke man confunderes med de saa kaldte gemene eller Briggiske Logarithmer, hvis Model er = 0,4342945, og hvorom nu skal handles.

§. 78.

## §. 78.

**Forkl.** Af alle mulige Logarithme-Systemer kaldes det, hvis Grundtal er 10, eller hvis Grundforhold er 1 : 10, det gemene eller Briggiske Logarithme System.

Dette System blev strax efter at Logarithmerne af Johan Naiper vare opfundne, beregnet af Henrich Brigg og fuldført af Adrian Vlacq. For dette System, som bestaaer af disse to Rækker

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1, | 10, | 100, | 1000, | 10000 |
| eller | $10^0$, | $10^1$, | $10^2$, | $10^3$, | $10^4$ |
| Logarithm. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

har Brigg beregnet Logarithmer til alle Primtal paa den (§. 74) forklarede Maade, nemlig ved at søge utallige Mellemproportional-Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Tal-Række; paa den i §. 77 nævnte Methode kunde de derimod lettere findes; ligesom og de naturlige Logarithmer nu meget let kan forandres til Briggiske, og omvendt, efter det (§. 77) anførte.

Till. 1. Det Briggiske System har, foruden de forhen anførte Fordele, denne særdeles Fordeel, at man af Cifrenes Antal i det Tal, hvis Logarithme man søger, strax kan vide Logarithmens hele Tal (eller det første Tal i Logarithmen), som derfor og kaldes Logarithmens Kiendetal eller Caracteristik (de

øvrige

øvrige eller Brøkerne kaldes Mantissen), der altid indeholder saa mange Eenheder som Tallet, hvortil Logarithmen svarer, har Cifre mindre end een. Saaledes er Logarithmen for alle Tal fra 1 til 10 0 og en Brøk, for Tallene fra 1 til 100 (der bestaae af to Cifre) 1 og en Brøk o. s. fr. Omvendt kan man af Logarithmens Kiendetal vide hvor mange Cifre det til Logarithmen svarende Tal har.

Till. 2. At beregne et fuldstændigt Logarithme-System vilde, efter det Forklarede, vel ikke være noget vanskeligt, men dog et overmaade vidtløftigt Arbeide; men vi kunde nu spare os denne Umage. Vore Forgiængere have heri sørget for os, og paa den ovenmeldte besværlige Maade længst fuldført dette Arbeide. Vi behøve kun at giøre os Brugen ret bekiendt af de allerede tilværende logarithmiske Tavler.

Till. 3. Disse Tavler indeholde dog allene kun Logarithmer for hele bekræftende Tal; thi Logarithmer for Brøk (som ere nægtende) kan vides af Logarithmerne for hele Tal (som siden skal vises), og for nægtende Tal gives aldeles ingen Logarithmer, da ingen Potens af det antagne bekræftende Grundtal (§. 12) kan blive nægtende, men bliver stedse bekræftende (§. 19).

Till. 4. Ved mindre Tavler forstaaes almindelig saadanne, som kun indeholde Logarithmer for

de

de naturlige Tal fra 1 til 10000 eller mindre, og hvor Logarithmerne kun have syv eller endog færre Decimalbrøk; ved større Tavler derimod deels saadanne, som gaae i det ringeste til 100000, og deels saadanne, hvor Logarithmerne have flere end syv Decimalsteder.

Anm. 1. Af de mindre gives der en stor Mængde, som, uagtet de mange Gange ere oplagte, dog ere fulde af Trykfeil og slet ikke beqvemt indrettede, med hvilke man dog møisommelig have hjulpet sig, da de store af Sherwin og Gardener ere for dyre til at enhver Mathematiker kan anskaffe sig dem; først for tyve Aar omtrent have større og beqvemt indrettede i Tydskland udgivne Tavler været at erholde for en taalelig Priis. Det er meget at tilraade enhver Begynder, strax at betiene sig af en af disse velindrettede Tavler, hvorved de logarithmiske Regninger kan føres med Nøiagtighed.

Anm. 2. De vigtigste af disse ere følgende:

I) Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln von Johan Carl Schulze. Berlin 1778. 8vo. (Koster i Tydskland 4 Rdlr.)

II) Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von Georg Vega. 2te Aufl. Leipzig 1794. 4to. (Priis 5 Rdlr.)

III) Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, von Georg Vega. Leipzig 1793. (Koster i Tydskland 1 Rdlr. 4 Gr.)

Af

Af disse fortiener No. II at anbefales til alle som agte at giøre Fremgang i Mathematik, naar de ikke allerede eie No. I; hvem denne er for kostbar, skaffe sig i det mindste No. III.

IV) Ved afdøde Prof. Geuss's Omsorg have vi ogsaa en Samling af Logarithme-Tabeller her udgivne, som kan faaes i den Gyldendalske Boghandling for 3 Mk.

At besørge en dansk Udgave af Logarithmer efter de Vegaiske Tavler med de mulige Forbedringer, er et Ønske, jeg længe har næret, naar Tid forundes mig og en Forlægger dertil kunde findes.

Anm. 3. Indretningen i alle disse Tavler, som og i de i Engelland og Frankrig hidtil udkomne, er i Hovedsagen den samme; saa at den her følgende Underretning om Brugen af trigonometiske Tavler og deres Indretning, hvorved jeg især har Hensyn til og citerer Vega's logarithmiske Haandbog, kan let anvendes paa alle de andre.

## §. 79.

Efter det Forklarede (§. 73) er Logarithmen for ethvert givet Tal $N$, multipliceret med 10 i en vis Potens, Log. $(N \times 10^n) =$ Log. $N + n \times$ Log. 10; men da i det Briggiske System Log. $10 = 1$ (§. 78), saa er efter samme Log. $(N \times 10^n) =$ Log. $N + n$, og findes altsaa, naar man til Kiendetallet i Logarithmen for $N$ adderer Exponenten $n$ uden at forandre Mantissen.

$N$ være

$N$ være for Ex. 3 og $n = 2$, saa er Log. $(3 \times 10^2) =$ Log. 3 + 2 Log. 10 = Log. 3 + 2, men Log. 3 = 0,4771212 og Log. 300 = 2,4771212. Ligeledes er Log. $(N : 10^n) =$ Log. $N - n$ Log. 10; og da Log. 10 = 1, saa er Log. $(N : 10^n) =$ Log. $N - n$, og findes naar man fra Kiendetallet i Logarithmen for $N$ subtraherer Exponenten $n$ uden at forandre Mantissen. $N$ være f. Ex. = 874 og $n = 2$, saa er Log. $(874 : 10^2) =$ Log. 874 — 2 x Log. 10 = Log. 874 — 2 =; nu er Log. 874 = 2,9415114, altsaa Log. $\frac{874}{100} = 0{,}9415114$.

Anm. I det sidst anførte Tilfælde er det i Regninger særdeles beqvemt, blot at tilkiendegive Subtractionen ved Tegn uden virkelig at foretage den, saaledes at man paa høire Side af Log. $N$ sætter Exponenten $n$ med Tegnet (—) foran; som Log. $\frac{874}{100}$ = 2,9415114 — 2. En saadan Logarithme bestaaer altsaa af to Dele, nemlig en bekræftende (den egentlige Logarithme) og den tilføiede benægtende Deel — $n$, der skal subtraheres fra Kiendetallet (i den bekræftende Deel), og viser, at det Tal, der svarer til den bekræftende Deel, skal divideres med den $n$te Potens af 10.

Till. Denne anførte Egenskab giør, at det Briggiske System, med Hensyn til vores decadiske Tal-System, forskaffer i Regningen en overmaade stor Lettelse, da man af Logarithmen for ethvert

givet

givet Tal kan, blot ved at formere eller formindske Nævnetallet, finde Logarithmer til alle Producter eller Qvotienter, der kan frembringes ved at multiplicere eller dividere dette Tal med Potenser af 10.

For Ex. er Log. 874 = 2,9415114

saa er Log. 8740 = 3,9415114

Log. 87400 = 4,9415114

og Log. $\frac{874}{10}$ = Log. 87,4 = 2,9415114 — 1

= 1,9415114

Log. $\frac{874}{100}$ = Log. 8,74 = 0,9415114

Log. 0,874 = 0,0415114 — 1.

## §. 80.

1ste Opgave. At finde i Tavlerne Logarithmer til ethvert givet Tal, der ikke bestaaer af mere end fem Cifre.

Opløsn. 1. Bestaaer det givne Tal af eet, to eller 3 Cifre, saa finder man det i den §. 78 under No. III. nævnte Vegas Haandbog fra Side 2 til 5 i den Spalte, som for oven er betegnet med N (numerus) og dets Logarithme lige for i den næste Spalte, som er betegnet for oven med Ordet Log. Saaledes findes Side 5 Log. 874 = 2,9415114.

2. Bestaaer det givne Tal af fire Cifre, saa finder man det paa en af de følgende Sider i den

første

første for oven med N betegnede Spalte, og dets Logarithme, men uden Kiendetal, lige for i den næste Spalte, som for oven er betegnet med O, saaledes at de tre første Chifre af Mantissen, saa længe de blive uforandrede, ikke igientages, men maa tilføies.

Saaledes findes f. Ex. S. 12 Tallet 1345 lige for Mantissen 1287223 uden Kiendetal; men efter det (§. 79) anførte veed man, at Kiendetallet er 3, og altsaa Log. 1345 = 3,1287223
og (§. 79) Log. 134500 = 5,1287223
Log. 13,45 = 3,1287223 — 2
= 1,1287223

3. Har det givne Tal fem Cifre, saa søger man paa samme Maade de fire første i Spalten betegnet med N, og lige for i Spalten O de tre første Chifre af Mantissen, og i en af de andre Spalter, som for oven er betegnet med det Ciffer, der er det femte i det givne Tal, de fire øvrige Cifre af Mantissen.

Lad f. Ex. det givne Tal være 13457; man finder Side 12 i første Spalte de fire første Cifre 1345, lige for i den med o betegnede Spalte de tre første Cifre af Mantissen 128; og da det femte Ciffer i det givne Tal er 7, saa findes de fire øvrige Cifre af Mantissen lige for i den for oven med 7 betegnede Spalte at være 8483. Altsaa er

Log.

Log. 13457 = 4,1289483; thi at Kiendetallet skal være 4, sees af Cifrenes Antal i det givne Tal (§. 78 Till. 1).

Af denne fundne Logarithme kan uden videre Opsøgning findes

Log. 1345700 = 6,1289473 (§. 75)

Log. 13,457 = 1,1289483

Anm. Ere de paa den nu forklarede Maade fundne sidste fire Cifre af Mantissen foran betegnede med (*), saa skal til de tre første Cifre i Mantissen af den med o betegnede Spalte ikke tages de foregaaende, men de efterfølgende; hvilket endog uden dette Tegn kunde kiendes derpaa, at disse fire sidste Cifre ere mindre end de næst foregaaende. Saaledes er for Tallet 13336, som findes Side 12, Mantissen ikke 1240256, men 1250256.

## §. 81.

**Læresætn.** Uden mærkelig Feil kan man antage, at Differencen af Logarithmer voxer ligesom Differencen af de dertil svarende Tal, og altsaa at Delene af Logarithme-Differencen for to Tal, hvoraf det ene er een Eenhed høiere end det andet, forholde sig til hinanden ligesom Delene af denne Eenhed.

Beviis. Da Logarithme-Differencerne for de nær efter hinanden følgende Tal (hvilke Differencer

fra Side 6 findes angivne i den sidste Spalte, (der for oven er betegnet $P.P.$ og for neden diff.) hele Sider igiennem, især ved høie Tal., blive uforandrede de samme, saa kan man uden nogen mærkelig Feil antage, at disse Logarithme-Differencer ere proportionerede med Tallenes Difference; det er, at Logarithmen for et Tal, for enhver Eenhed, hvormed Tallet forøges, voxer saa meget som den enkelte Difference er imellem to paa hinanden følgende Logarithmer; og at følgelig ogsaa (ja end mere vist) et Tals Logarithme for hver Tiendedeel eller Hundrededeel, hvormed Tallet forøges, stedse bør forøges med en Tiende- eller Hundrededeel af Logarithme-Differencen.

For Ex. Side 61. For Tallet 37785 og det næstfølgende er Logarithme-Differencen 115 (hvilken man finder naar man subtraherer allene de sidste Cifre af Logarithmen for 37785 fra de sidste Cifre af den næstfølgende Logarithme). Forøges nu Tallet 37785 med Decimalbrøken 0,47, da maae Logarithmen forøges med ligesaa mange Dele af Differencen der findes ved denne Regning:

1 : 0,47 = 115 : $x$, og bliver $x$ = 54, som er det der skal lægges til Log. 37785 for at finde Log. 37785,47.

For at spare denne Regning findes i den sidste Spal-

Spalte under enhver Logarithme-Differents de logarithmiske Proportional-Dele, der svare til alle Tiendedele, og følgelig divideret med 10 ogsaa til alle Hundrededele. Saaledes i det anførte Exempel:

(for 0,4) $PP = 46$
og (for 0,07) $PP = \phantom{4}8,2$

Følgelig (for 0,47) som tilforn $= 54$

Nu er Log 37785 = 4,5773149,
altsaa Log. 37775,47 = 4,5773203.

Anm. Var den tilkommende Brøk 0,07, saa tage man (for 0,0) $PP = 00$
(for 0,07) $PP = 8,1$

Till. Lad $n$ være et af fem Cifre bestaaende heelt Tal, og $a$ en Decimalbrøk, der skal adderes dertil, saa at $n + a$ falder imellem $n$ og $n + 1$. Antages nu Log. $(n + 1)$ — Log. $n = D$ og Log. $(n + a)$ — Log. $n = d$, saa er den nylig forklarede Proportion $1 : a = D : d$, hvorved den logarithmiske Proportionaldeel $d$ findes, der maae adderes til Log. $n$ for at finde Log. $(n + a)$.

Af samme Proportion $D : d = 1 : a$ findes ogsaa $\frac{d}{D} = a$ ɔ: den Decimalbrøk som maae adderes til $n$ for at finde Tallet der svarer til Log. $(n + a)$.

Saaledes i det nylig anførte Exempel var

 Diffe-

Differencen imellem Log. 37285 og den næstfølgende = 115 og dens Difference fra en given Logarithme, der var større end den, men mindre end den følgende, = 54. Qvotienten $\frac{54}{115}$ = 8,47 er derfor den Decimalbrøk, der skal adderes til 37285.

Denne Regning spares, naar man Side 61 i den sidste Spalte ved Differencen 115 opsøger Proportionaldelen 46, som nærmer sig meest til 54. Det derved staaende Tal 4 giver Tiendedelene, og det ved det tidobbelte af Resten (80) staaende Tal 7 Hundrededelene; og følgelig udgiøre begge Decimalbrøken 0,47 som tilforn.

## §. 82.

2den Opgave. Ved Hielp af Tavlerne at finde Logarithmen til et givet Tal, der bestaaer af mere end fem Cifre.

Opløsn. 1. Bestaaer det givne Tal af sex eller syv Cifre, saa søger man (§. 80) Logarithmen for de fem første Cifre, og adderer dertil Proportionaldelene af Logarithme-Differencerne for det siette og syvende Ciffer, som findes i den sidste med *PP* betegnede Spalte (§. 81 Till.) og bestemmer Kiendetallet efter §. 78. Saaledes findes f. Ex.

(§. 81)

(§. 80) Logar. 3778547 = 7,5773248
Log. 37785470 = 8,5773248
Log. 37,785470 = 1,5773248.

Anm. Hvis i den sidste med *P P* betegnede Spalte den tilhørende Logarithme-Differents ikke findes, maa man tage den næstforegaaende større.

2. Bestaaer det givne Tal af mere end syv Cifre, saa kan til at finde Logarithmen bruges de i Tavlerne S. 186 og 187 anførte Logarithmer for Tallene til 101000 paa følgende Maader:

1) Bestaaer Tallet kun af otte Cifre og er saaledes, at de sex første Cifre udgiøre et Tal der er mindre end 101000, saa finder man dets Logarithme efter første Opløsning. F. Ex.:

Log. 10030627 = 7,0013281.

2) Bestaaer Tallet af otte eller flere Cifre, der ere af vilkaarlig Størrelse, saa bringer man det til første Tilfælde ved at dividere det med to eller flere af dets høieste Cifre, søger derpaa Logarithmen til Divisor og til Qvotienten og adderer dem sammen.

F. Ex. Der søges Logarithm. 290888209; dette Tal divideret med 29 giver Qvotienten 10030627, saa er Log. 10030627 = 7,0013281
Log. 29 = 1,4623980
Log. 290888209 = 8,4637261.

Anm.

Anm. Kan et giort, af mange Cifre bestaaende Tal opløses i Faktorer, da findes dets Logarithme ved at søge Faktorernes Logarithmer og addere dem; hvilket ogsaa kan tiene til Prøve paa den forrige Methode.

## §. 83.

3die Opgave. At finde Logarithmen til enhver Brøk eller Qvotient.

Opløsn. Man opsøger Logarithmen for Brøkens Tæller og Nævner (Dividend og Divisor), og (§. 75) subtrahêrer Nævnerens Logarithme fra Tællerens. Er Brøken uegentlig (Arithm. §. 74), har dette ingen Vanskelighed: men er den egentlig, og følgelig Nævneren større end Tælleren, kan man gaae frem paa to Maader:

1) Man subtrahêrer Tællerens Logarithme fra Nævnerens, og man faaer en nægtende Logarithme (§. 74. Till. 4).

Til Ex. søges Log. $\frac{3}{4}$ og Log. 0,09436

Log. 3 = 0,4771213
Log. 4 = 0,6020600
Log. $\frac{3}{4}$ = −0,1249387

Log. 9436 = 3,9747879
Log. 100000 = 5,0000000
Log. 0,09436 = −1,0252121

eller

eller 2) Man forhøier Kiendetallet i Tællerens Logarithme (§. 75), saa at Nævnerens Logarithme kan subtraheres derfra. Saaledes er ved de anførte Brøk:

Log. 3 = 1,4771213 — 1
Log. 4 = 0,6020608

Log. $\frac{3}{4}$ = 0,8750613 — 1

Den fundne Logarithme viser, at fra 0,8750613 skal subtraheres 1,0000000; giøres dette, faaes samme Logarithme som før, nemlig —0,1249387.

Ligeledes: Log. 9436 = 5,9747879 — 2
Log. 100000 = 5,0000000

Log. 0,09436 = 0,9747879 — 2

Forrettes her den tilkiendegivne Subtraction, faaes som før Log. 0,09436 = 1,0252121.

Anm. Logarithmen for enhver gemeen Brøk kan findes ved at forvandle den til en Decimalbrøk og søge dens Logarithme, da man blot søger Tællerens Logarithme og føier Kiendetallet i Nævnerens Logarithme (der efter det Briggiske System vides uden at søges) med Nægtelses-Tegn til ved høire Side. F. Ex. Log. $\frac{3}{4}$ = Log. 0,75 = 1,8750613. —2. = 0,8750613 — 1. Faaer man, ved at forvandle den simple Brøk til en Decimalbrøk, alt for mange Decimalsteder, eller og Brøken ikke fuldkommen nøiagtig kan udtrykkes, saa er det bedre at beholde den simple Brøk. F. Ex. Log. $\frac{13}{24}$ kan findes nøiagtig; men forvandles den til Decimalbrøk, faaer man 0,5416 ... i det uendelige, hvis Logarithme ikke kan findes.

Till. 1. Har en Decimalbrøk sit første betydende Ciffer i den første, anden, tredie eller *n*te Plads efter Commaet (Nullerne ansees som ikke betydende og tiene blot til at fylde Pladsen), saa har dens Logarithme til positiv Kiendetal 0, og til nægtende 1, 2, 3 eller *n*, som angiver, at det Tal, hvortil den bekræftende Logarithme hører, skal divideres med $10^1$, $10^2$ eller almindelig med $10^n$. Saaledes findes (§. 81)

Log. 0,13457 = 0,1289483 — 1

Log. 0,01345 = 0,1287223 — 2

Log. 0,00874 = 0,9515114 — 3

Till. 2. Forlanges Logarithmen til et saakaldet blandet Tal (et heelt Tal med en tilføiet Brøk), da forvandles det Hele til en uegentlig Brøk, og Logarithmen søges til Tæller og Nævner paa den nu forklarede Maade, og den sidste subtraheres fra den første, saa vil Differencen være Logarithmen til det givne Tal (§. 75).

F. Ex. Log. $471\frac{5}{7}$ = Log. $\frac{3302}{7}$ = Log. 3302 — Log. 7 = 3,5187771 — 0,8450980 = 2,6736781.

Anm. Findes der ved Tallet en Decimalbrøk, saa søger man Logarithmen til det givne Tal, som om det bestod af lutter hele Tal (uden at lægge Mærke

til

til Kommaet, der skiller Brøkzifrene fra de hele Tal), og giver den fundne Logarithme det Kiendetal som de for Stregen værende hele Tal fordre (77).

F. Ex. Naar der søges Logarithmen til 785,43, saa søger man i Tavlerne Log. 78543 som findes uden Kiendetal = 8951075, de for Stregen værende hele Tal 785 fordre Kiendetallet 2; altsaa er Log. 785,43 = 2,8951075. Aarsagen til denne Fremgangsmaade indsees let, thi Log. 785,43 = Log. $\frac{78543}{100}$ = Log. 78543 — Log. 100; men Kiendetallet for den første Logarithme er 4, og for den anden Logarithme er Kiendetallet 2 uden Mantisse; følgelig skal Differencen have Kiendetallet 2 med den første Logarithmes Mantisse.

## §. 84.

### 4de Opgave. At finde Logarithmen til en vis Potens eller Rod af en Brøk.

Opløsn. Man søger Logarithmen til den givne Brøk (§. 83) og multiplicerer den med Exponenten til den forlangte Potens, eller dividerer den med Exponenten til den forlangte Rod (§. 76). Dette har i Almindelighed ingen Vanskelighed; kun naar der forlanges Logarithmer for Roden af en egentlig Brøk, da man, for at kunde dividere med Rod-Exponenten, maae, ved at forøge baade Logarithmens bekræftende og nægtende Kiendetal,

indrette den saaledes, at Rod-Exponenten kan gaae op i det negative Kiendetal.

F. Ex. Om der forlanges ved Logarithmer at finde den femte Rod af Brøken $\frac{3456}{5963}$, saa er

$$\begin{aligned} \text{Log. } 3456 &= 4{,}5385737 - 1 \\ \text{Log. } 5063 &= 3{,}7754648 \\ \hline \text{Log. } \tfrac{3456}{5963} &= 0{,}7631089 - 1 \end{aligned}$$

Denne Logarithme bringes, ved at forøge saavel det bekræftende som nægtende Kiendetal med 4, til at Rodexponenten, hvormed der skal divideres, kan gaae op i det nægtende Kiendetal; den faaer nemlig denne Form: Log. $\frac{3456}{5963} = 4{,}7631089 - 5$ og Log. $\sqrt[5]{\frac{3456}{5963}} = \frac{4{,}7631089 - 5}{5} =$ $0{,}9526218 - 1$.

## §. 85.

Det decadiske Complement (complementum arithmeticum) til en given Logarithme kaldes det, som bliver tilovers, naar man subtraherer ethvert Tal i Logarithmen fra 10.

Eller naar $n$ betyder et vilkaarligt Tal, saa er det decadiske Complement til dets Logarithme $=$ Log. $10^{10}$ — Log. $n$. For Ex. det decadiske Complement for Logarithmen til $n = 139{,}13$

er

er = Log. $10^{10}$ = 10,0000000
— Log. 139,13 = 2,1434208

Decadisk Complement = 7,8565791
hvor det sidste Ciffer 8 ikke subtraheres fra 10, men i det Sted fra 9, da man formedelst Mantissens Ufuldstændighed kan antage, at det sidste Ciffer kan formodes at være 9 i Stedet for 8.

Tilf. Bruges ved Regning den decadiske Opfyldning, maae man altid ved høire Side tilføie — 10.

§. 86.

5te Opgave. At finde Logarithmen til en Brøk af den Form $\frac{ac}{b}$.

Opløsn. 1. Man adderer Logarithmerne for Tællerens Faktorer og subtraherer derfra Nævnerens Logarithme. F. Ex. der forlanges Log. $\frac{144 \times 3576}{139,13}$.

Log. 3576 = 3,5410798
Log. 144 = 2,1593625

Log. (3576 × 144) = 5,6994423
Log. 139,13 = 2,1434208

Log. $\left(\frac{3576 \times 144}{139,13}\right)$ = 3,5569215

Opl.

Opl. 2. Man adderer Tæller-Faktorernes Logarithmer og den decadiske Opfyldning til Nævnerens Logarithme; den udkomne Sum tilføies — 10 paa høire Side (ↄ: dens Kiendetal formindskes ved at tage 10 derfra). Det anførte Exempel vilde da staae saaledes:

Log. 3576 = 3,5410798

Log. 144 = 2,1583625

decadisk Opf. til Log. 139,13 = 7,8565791 — 10

$$\text{Log. } \frac{3586 \times 144}{139{,}13} = 13{,}5560214 - 10$$

= 3,5560214 som tilforn.

Bev. Log. $a$ + Log. $c$ — Log. $b$ = (Log. $a$ + Log. $c$ — Log. $b$) + 10 — 10 = Log. $a$ + Log. $c$ + (10 — Log. $b$) — 10; men (10 — Log. $b$) er just den decadiske Opfyldning til Log. $b$ (§. 84).

Till. Bliver $a$ og $b$ uforandrede, medens $c$ tillægges mange forskiellige Værdier, da gives Brøken denne Form $\frac{a}{b} \times c$; og naar $a > b$, søges eengang for alle Log. $a$ — Log. $b$, og denne bestandige Logarithme adderes til Log. $c$ (efter den $c$ hvergang tillagte Værdie) eller subtraheres derfra naar Brøkens Form var $\frac{b}{a} \times c$, og $a$ dog var som før større end $b$.

Anm.

Anm. Det hidtil Anførte om Tavlernes Brug angik den første Hoved-Opgave: at finde Logarithmen for ethvert givet Tal; vi komme nu til den anden Hoved-Opgave: at finde hvad Tal der svarer til enhver given Logarithme.

§. 87.

6te Opgave. At finde Tallet der svarer til en given Logarithme.

Opløsn. Man opsøger i Tavlerne den givne Logarithmes Mantisse uden at bekymre sig om Kiendetallet, mærker det derudfor staaende Tal, hvis decadiske Værd let efter den der givne Logarithmes Kiendetal bestemmes (§. 78). Den givne Logarithme være f. Ex. 4,5773194; man opsøger da fra Side 6 i Tavlerne den Side, paa hvilken man efter den for oven paa Siden ved Bogstavet *L* givne Anviisning finder de tre første Cifre af Mantissen i den med o betegnede Spalte. Saaledes i det anførte Exempel findes S. 61, 577, men de fire sidste Cifre søges i denne eller een af de følgende Spalter; og man finder her i den med 5 betegnede Spalte de fire sidste Cifre (3194) i den anførte Mantisse; findes ikke disse fire sidste Cifre nøiagtig, da tages de der nærme sig meest dertil. Af den første med *N* betegnede og af denne (med 5 betegnede) Spalte

tages

tages de til Mantissen svarende Tal, som her er 37785.

Till. 1. Findes den givne Mantisse nøiagtig i Tavlerne, da er det fundne Tal nøiagtig det søgte, og dets decadiske Værd behøves blot at bestemmes (§. 78).

Saaledes er 4,5773194 = Log. 37785.
7,5773194 = Log. 37785000
2,5773194 = Log. 377,85
0,5773194 = Log. 3,7785
0,5773194—1 = Log. 0,37785
0,5773194—2 = Log. 0,03778.

Till. 2. Nærmer den fundne Mantisse 5773194 (som vi vil kalde m) sig blot den givne 5773248 (som antages = *M*), saa gielder ogsaa det fundne Tal 37785; men da den givne Mantisse *M* var større end den fundne *m*, faaer Tallet endnu to Cifre, som findes paa følgende Maade:

Man subtraherer den fundne Mantisse *m* fra den i Tavlen næstfølgende høiere, og ligeledes fra den givne *M*, og lægger Mærke til den første Differents *D*, som i nærværende Exempel er = 115, og den anden *d*, som findes her = 54. Nu findes i den med *P P* betegnede Spalte ved Proportionaldelene 46 og 81 de to Tal 4 og 7, som

som endnu maae føies til det givne, da saaledes Tallet 3778547 svarer til den givne Mantisse 5773248. Den decadiske Værd af det fundne Tal bestemmes som i første Tilfælde (Till. 1).

Till. 3. Endnu maae mærkes:

1) Fandtes Logarithme-Differencen $D$ af en Hændelse ikke i den med $P$ $P$ betegnede Spalte, saa tager man den næste mindre.

2) Var $d$ mindre end den i sidste Spalte under $D$ ved 1 staaende Proportionaldeel, saa er af de omtalte to Tal det første 0, men det andet det ved Proportionaldelen, som er = 104 staaende Tal.

3) Var den givne Mantisse 5770090, saa indseer man let, hvorfor de fire sidste Cifre 0090 maa føies imellem de til de tre første 576 henhørende med (*) betegnede Ziffre.

§. 88.

7de Opgave. At finde det Tal der svarer til en given negtende Logarithme.

Opløsn. 1. Vil man finde det tilsvarende Tal i Decimalbrøk (at det maae være en Brøk, er klart), saa adderer man til den givne Logarithme, som kunde være f. Ex. —2,4226805, Logarithmen til 1000, 1 Mill. eller 1000 Mill., for Ex.

den

den sidste, som er 9, og man faaer 6,5773194, og søger paa den (§. 87) forklarede Maade det tilsvarende Tal 3778547. Dette divideres med 1000,000000, og man faaer 0,003778547.

Beviis. Ved at addere den nægtende Logarithme til Logarithmen for 1000 Millioner, er det fundne Tal blevet tusind Millioner Gange større end det skulde; for altsaa at give det fundne Tal sin sande Værd, maae det divideres med 1000 Mill.

2. Vil man have en simpel Brøk, saa søger man det, til den givne Logarithme, positiv tagen, svarende Tal (§. 87) 264,6352, og sætter en Brøk, hvis Nævner er dette Tal, og hvis Tæller er Eenheden. Altsaa $\frac{1}{264,6512} = \frac{10000}{2646512} = \frac{1250}{330819}$.

Beviis. Den givne negative Logarithme være $= -L$ og $L =$ Log. $n$; saa da $L$ er antagen $=$ Log. $n$, saa er og $-L =$ Log. $-n$, altsaa ogsaa Log. $1 - L =$ Log. $1 -$ Log. $n$; men nu veed vi, at Log. $1. -$ Log. $n$ er Log. $\frac{1}{n}$, altsaa Log. $1 - L =$ Log. $\frac{1}{n}$, men Log. $1 = 0$, følgelig $-L =$ Log. $\frac{1}{n}$; ɔ: det til Logarithmen $-L$ svarende Tal er $= \frac{1}{n}$, naar ellers Tallet $n$ hører til Logarithmen $L$.

Saaledes finder man f. Ex., at til Logarithmen $-$ 1,3262234 svarer Tallet 0,04718, naar

man

man til − 1,3262334 adderer Logarithmen for 100000, som er 5; ɔ: naar man subtraherer 1,3262334 fra 5 (Arithm. §. 33) og til den da fundne positive Logarithme 3,6737666 opsøger det nærmest svarende Tal 4718, og dividerer det med 100000.

Anm. I Stedet for Logarithmen til 100000 kunde man adderet enhver anden positiv Logarithme, f. Ex. Log. 144 til den givne nægtende, og derpaa divideret det til den frembragte positive Logarithmer svarende Tal med 144.

§. 89.

Uagtet der i den hele Mathematik forekomme idelige Leiligheder til at anvende Logarithmerne, saa har jeg dog troet det passende, her at anføre nogle særdeles Exempler paa deres Brug, for at give Begyndere Anledning til strax at udøve den her meddeelte Underretning, som og for at giøre opmærksom paa Forskiellen imellem den simple Regning og Regning med Logarithmer.

1ste Opgave. At forvandle en simpel (gemeen) Brøk til Decimalbrøk.

Opløsn. Den givne Brøk være $\frac{1}{7}$. Da Log. $\frac{1}{7}$ = Log. 1 − Log. 7 = − Log. 7, saa søger man i Tavlerne Log. 7, tager dens decadiske Opfyldning 9,1549019 − 10 = 0,1549019;

denne opsøgt giver Tallet 0,142857 = $\frac{1}{7}$ (Arith. §. 45).

2den Opgave. Naar en dansk Fod i Længdemaal holder 139,13 Pariser Linier; hvor mange Pariser Kubiktommer holder da en dansk Kubikfod?

Opløsn. En dansk Fod = $\frac{139,13}{12}$ Pariser Tommer; heraf søges Kubus saaledes (§. 76):

$$\text{Log. } 139,13 = 2,1434208$$
$$\text{Log. } 12 = 1,0761812$$
$$\text{Log. } \frac{139,13}{12} = 1,0642396$$
$$3 \times \text{Log. } \frac{139,13}{12} = 3,1927188,$$

som, opsøgt efter den givne Anviisning, angiver Tallet 1558,507, som er det forlangte.

3die Opgave. Naar Forholdstallet imellem to Maal er givet, da af det ene at finde det andet.

Opløsn. Sæt at det større forholder sig til det mindre som $m : n$. For Ex. Pariser og dansk Fodmaal 144 : 139,13, og $m$ Eenheder af det større er lige med $n$ Eenheder af det mindre; man skal, naar et af disse to Tal er givet, finde det andet. F. Ex. efter la Lande er en middel Grad paa Jordkloden = 57020 Toiser = 342180 Pariser

riſer Fod = $m$; hvor mange danſke Fod er den da? eller hvad er $n$?

Da Forholdet $a : b$ bliver uforandret, ſaa regner man efter den Form $\frac{a}{b}$ (§. 86 Till.); vi finde da her Log. $m$ + Log. $\frac{a}{b}$ = Log. $n$ og Log. $n$ — Log. $\frac{a}{b}$ = Log. $m$.

$$\text{Log.}\ \frac{a}{b} = \text{Log.}\ \frac{144}{139,13} = 0,0149417$$
$$\text{Log.}\ m = \text{Log.}\ 34210 = 5,5342546$$
$$\text{Log.}\ n = 5,5391963$$

ſom giver Tallet $n$ = 354157 danſk Fod, $\frac{1}{15}$ deraf giver 23610 danſk Fod eller en geographiſk Miil.

Anm. En danſk Miil er 24000 Fod, altſaa 390 Fod ſtørre end en geographiſk Miil.

## IX. De geometriſke Talrækkers og Logarithmers Anvendelſe til at opløſe forſkiellige Regnings-Opgaver.

§. 90.

1ſte Opgave. Hvor ſtor vil en vis Capital $a$ være efter $n$ Aar, naar Renten ved ethvert Aars Ende lægges dertil, og af denne igien gives Rente?

Opløsn. Renten af en vis Capital $a$ kan altid ansees som et Produkt af Capitalen og en egentlig Brøk. Er f. Ex. Rentefoden (den lovmæssige Rente), som her i Dannemark er 4 Procento (4 Rdlr. af Hundredt), saa er Renten for et Aar $\frac{1}{25}a$; og antage vi i Almindelighen, at det er Brøken $\frac{q}{r}$, hvormed Capitalen skal multipliceres for at finde Renten for eet Aar, saa er det almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r}a$.

| | | |
|---|---|---|
| Og saaledes efter 1 Aar | $a + \frac{q}{r}a = \frac{ar+qa}{r} =$ | $\frac{r+q}{r}a$ |
| 2det Aar | $\frac{r+q}{r}a + \frac{q}{r}\left(\frac{r+q}{r}\right)a =$ | |
| | $= \frac{r^2 + 2rq + q^2}{r^2}a =$ | $\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a$ |
| 3die Aar | $\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a + \frac{q}{r}\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a =$ | |
| | $= (r^3 + 2r^2q + r^2q + rq^2 + 2rq^2 + q^3)a = (r^3 + 3r^2q + 3q^2r + q^3)a : r^3$ | $\left(\frac{r+q}{r}\right)^3 a$ |
| n Aar | $\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} a + \frac{q}{r}\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} a =$ | $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ |

Ved

Ved Logarithmer findes Værdien $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ saaledes: Log. $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a = n$ Log. $\frac{r+q}{r}$ + L. $a$ = $n$ (Log. $(r+q)$ — L. $r$)) + L. $a$.

Exempel. Hvad er Capital, Rente og Rentes Rente af 10000 Rdlr. efter 10 Aars Forløb, naar Renten er 5 Procent eller $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$? Efter Formen er den søgte Summa, som vi kan kalde $x = \left(\frac{r+q}{r}\right)^{10} a$; altsaa Log. $x$ = 10 (Log. $(r+q)$ — Log. $r$)) + Log. $a$. Ved at indsætte de givne Værdier er

Log. $x$ = 10 (Log. 21 — Log. 20) + Log. 10000

Nu er Log. 21 = 1,3222193

Log. 20 = 1,3010300

Log. 21 — Log. 20 = 0,0211893, som, multipliceret med 10, giver 0,2118930

hertil adderes Log. 10000 = 4,0000000

og Log. $x$ = 4,2118930, som, opsøgt i Tavlerne efter de forklarede Regler, henviser til Tallet 16280, som er den forlangte Capital med Rente og Rentes Rente.

§. 91.

2den Opgave. Naar en Capital $a$ var udlaant paa de Vilkaar, at den først efter et

be

bestemte Antal af Aar, som vi vil kalde $n$, skulde tilbagebetales; hvormeget skal Eieren have, naar Laaneren strax betaler?

Oplosn. Det er klart, at den, der faaer en Capital udbetalt før han kunde fordre den, maa være fornøiet, naar han faaer saa stor en Sum af Capitalen, at denne, udsat til lovlige Renter og disse Renter igien nyttede, kunde til den bestemte Tid udgiøre den fulde Capital som han da havde at fordre.

Naar vi altsaa i den forrige Form $x = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ satte $a$ og $x$ i hinandens Sted, saa at den Størrelse, der før var ubekiendt og søgtes, er nu den givne og omvendt, saa finde vi af Formen

$$a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n x$$

$$x = a : \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$$

$$x = a \times \left(\frac{r}{r+q}\right)^n = \frac{r^n}{(q+r)^n} a$$

Følgelig Log. $x = n$ L. $r$ + L. $a$ — $n$ L. $(q+r)$.

Exempl. En Arv af 4000 Rdlr. er bestemt at udbetales til en Person naar han er 20 Aar gammel; til den Tid er fri Raadighed derover og Brug deraf overdraget til en anden, som vi vil antage

undtage at kunde yde 10 Procent aarlig i Fordeel heraf. Hvormeget kan den største uden Skade udbetale til Arvingen naar han er 15 Aar, eller fem Aar før den bestemte Tid?

Her er $n = 5$, $a = 4000$. $\frac{q}{r} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ($q = 1$, $r = 10$); vi finde da

$$\text{Log. } x = \begin{cases} 5 \text{ Log. } 10 = 5{,}0000000 \\ + \text{Log. } 4000 = 3{,}6020600 \\ \quad\quad 8{,}6020600 \\ - 5 \text{ Log. } 11 = 5{,}2069635 \end{cases}$$
$$= 3{,}3950965,$$

som giver Tallet 2484 paa det nærmeste; mere end 2484 Rdlr. kan han følgelig ikke uden Skade accordere Arvingen.

Anm. 1. I den her brugte Form betyder $n$ hele Aar. Er derimod den givne Tid et blandet Tal, f. Ex. $8\frac{1}{2}$ Aar, saa sætter man $n = 8$, og for den da fundne Capital $x$ beregnes den simple Rente for $\frac{1}{2}$ Aar.

Ere i et Land halvaarlige eller fjerdingaarige Renter brugelige, saa sætter man $\frac{q}{2r}$ eller $\frac{q}{4r}$ i Stedet for $\frac{q}{r}$ og $2n$ eller $4n$ i Stedet for $n$.

F. Ex. Hvad er Værdien af en Capital til 4 Procent efter $n$ Aar, naar Renterne betales hvert halve Aar? er det samme som: hvad er Værdien af samme Capital til 2 Procent efter $2n$ Aar?

Anm.

Anm. 2. Man har beregnet Tavler for Størrelsen $\left(\frac{r \mp q}{r}\right)^n$ enten ved Logarithmer, eller nøiagtigere umiddelbar ved at søge Potenser af $\left(\frac{r \mp q}{r}\right)$. Saadanne Tavler finder man f. Ex. i

1) Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenb. 1781. 4.
2) Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften von Joh. Nicol. Tetens. Leipzig 1785.
3) Anfangsgründe der Staatsrechenkunst von Joh. Wilhelm Christiani. Helmstædt 1793.

Disse tre i dette Fag særdeles brugbare Bøger indeholde, foruden de omtalte, endnu flere, til denne Slags Regning nødvendige Tavler.

§. 92.

Læresætn. Bliver en paa Rente udsat Capital $a$ foruden den tillagte Rente og Rentes Rente desuden aarlig forøget med en bestemt Summa $b$, da er efter $n$ Aar Værdien af den hele Capital $x = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a +$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \frac{r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$$

Beviis.

**Beviis.** Efter dette i Forveien antagne almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r}a$

| er efter | Capital, Rente og Tillæg. |
|---|---|
| 1 Aar | $= \frac{q+r}{r}a + b$ |
| 2 Aar | $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 a + \frac{q+r}{r} b + b$ |
| 3 Aar | $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 b + \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b$ |
| n Aar | $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-2} b$ |
| | $+ \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b.$ |

Capitalen bestaaer altsaa efter $n$ Aar af to Dele, nemlig 1) $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$, og 2) en geometrisk Række, hvis første Leed er $b$, Leddenes Antal $n$, og Forholdsnavnet (Exponenten) $\frac{q+r}{r}$. Summen af denne findes (§. 66) efter Formen $s = \frac{m^n g - a}{m - 1}$ at være

$$= \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \frac{r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$$

her

hertil lægges den første Deel $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$ og vi faae Værdien af den hele Capital efter $n$ Aar $=$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a+\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b-rb}{q}$$

Anm. Formindskes Capitalen ved hvert Aar at fratage en bestemt Summa, da er Formen den samme, kun at de to Dele, man tilsidst faaer, forbindes med $-$; og man finder hvad der af den første Capital $a$ bliver til Rest efter $n$ Aar naar hvert Aar en bestemt Summe $b$ fratages $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a -$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b + rb}{q}$$

## §. 93.

3die Opgave. Hvormeget er tilovers efter 20 Aars Forløb af 10000 Rdlr. med Rente og Rentes Rente, naar hvert Aar fortæres 600 Rdlr?

Sætte vi Renten 5 Procent $= \frac{1}{20}$, saa have vi $q = 1$, $r = 20$, $a = 10000$, $n = 20$, $b = 600$; den søgte Rest altsaa efter Formen $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times 20b + 20b =$

$\left(\frac{21}{20}\right)^n \times (a - 20b) + 20b$. Er nu, som i

nærværende Exempel, $b > \frac{1}{20}a$, saa er $20b > a$; Resten bliver altsaa $= 20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a)$; følgelig findes den søgte Rest naar man adderer $n$ Log. $\frac{21}{20}$ + Log. $(20b - a)$ og subtraherer det til den fundne Logarithme svarende Tal fra $20b$. Altsaa i nærværende Opgave

$$20 \text{ Log. } \frac{21}{20} = 0{,}4237860$$

$$\text{Log. } (20 \times 600 - 10000) = \underline{3{,}3010300}$$

$3{,}7248160$, som findes at være Log. 5306; dette subtraheret fra $20b = 12000$ giver Rest 6694 Rdlr., som er det det bliver tilbage af Capitalen efter 20 Aar.

Till. 1. Forandres Spørgsmaalet saaledes, at der spørges: hvorlænge det vil vare inden Capitalen $a$ er fortæret? da sees let, at $n$ i forrige Form er her den søgte Størrelse, og at Betingelsen fører det med sig, at Resten, i det Øieblik Capitalen er fortærrt, er $= 0$, og følgelig

$$20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a) = 0$$

eller $20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a)$

altsaa Log. $20b = n$ Log. $\frac{21}{20}$ + Log. $(20b - a)$

Log. $20b$ − Log. $(20b - a) = n$ Log. $\frac{21}{20}$

Log.

$$\text{Log.}\left(\frac{20b}{20b-a}\right) : \text{Log.}\,\tfrac{21}{20} = n$$

$$\text{Log.}\left(\tfrac{12000}{2000}\right) = \text{Log. } 6 \text{ og } n =$$

$$\frac{\text{Log. } 6}{\text{Log. } \frac{21}{20}} = \frac{0{,}7781512}{0{,}0211893} = 36 \text{ Aar } 8 \text{ Maaneder}$$

22 Dage.

Till. 2. Hvor stor en Capital $a$ maae man udsætte for at sikre sig en vis aarlig Indtægt $b$ i $n$ Aar?

Af Ligningen $20b - \left(\frac{21}{10}\right)^n 20b + \left(\frac{21}{20}\right)^n a = 0$ findes $\left(\frac{21}{20}\right)^n a = \left(\frac{21}{20}\right)^n \times 20b - 20b$

$$\text{og } a = 20b - \frac{20^n \times 20b}{21^n}$$

Lad til Ex. være $b = 600$, $n = 20$, saa er

$$\text{Log. } 20b = 4{,}0791812$$

$$20 \times \text{Log. } 20 = 26{,}0206000$$

$$\text{Log. } 20b + 20 \text{ Log. } 20 = 30{,}0997812$$

$$20 \text{ Log. } 21 = 26{,}4443860$$

$$\text{Log.}\left(\frac{20^n \times 20b}{21^n}\right) = 3{,}6553952,$$ som

er Log. 4522, der subtraheres fra $20b$, som her er $20 \times 600 = 12000$; og saaledes er $12000 - 4522 = 7478$ Rdlr. den Capital, som der

efter

efter den antagne Rentefod udfordres, for i 20 Aar at have 600 Rdlr. aarlig Indkomst.

§. 94.

Forklar. Saaledes som Renten eller den bestemte Indtægt hidtil er anseet, er den noget Vist, og bliver saaledes bestemt, at Capital tilligemed de aarlige Renter derved i et vist Antal Aar fortæres. Den kaldes Rente for en bestemt Tid, og kan arves. Livrente derimod kaldes den, som kun udbetales til Kiøberens Dødsdag, og kan beregnes paa samme Maade som Tid-Rente, (§. 93), kun at *n* ikke er et bestemt Tal, men maae bestemmes efter Kiøberens Alder og Mortalitets-Tabeller. Ved de Interessentere, der døe tidligen, vinder Kassen hvad den taber ved dem, der leve længere end den efter Rimelighed beregnede Tid. Efter Deparcieux er efter Middeltal den Tid, en Person paa 45 Aar endnu kan vente at leve, 20 Aar; hvormeget man kunde give ham aarlig i Livrente for 1000 Rdlr. Indskud beregnes efter §. 93, og man faaer 80¼ Rdlr. eller 8 Procent.

En Tontine er ligeledes en Slags Livrente, dog med det Særegne, at Interessenterne arve hinanden, og den Bortdødes Deel fordeles imellem de endnu Levende, indtil alle Deeltagende ere ud-

Rodede. Navnet har denne Slags Livrente af en Neapolitaner Lorentz Tonti, som først giorde den bekiendt i Frankrig. Den første oprettedes Aar 1689, hver Actie kostede 300 Livres; en Barbeer-enke, der blev 96 Aar gammel, fik tilsidst 73500 Livres.

## X. Om forskiellige enkelte Tings Omsætninger og Forbindelser (transpositionibus et combinationibus).

§. 95.

1ste Opgave. At finde alle de mulige Ordener, hvori et Antal givne Ting, som Bogstaverne *a*, *b*, *c*, *d* eller Tallene 1, 2, 3, 4 kan stilles, saaledes, at den ene ikke er fuldkommen og i alle Henseender den samme som den anden.

Oplosn. Var *a* allene given, saa er kun een Orden mulig; kommer *b* til, kan det sættes for eller efter *a*, nemlig *ab* og *ba*; her er altsaa 2 eller 2 × 1 Omsætning; kommer endvidere *c* til, saa kan det sættes saavel til *ab* som *ba* foran, i Midten og ved Enden, og vi have da 3 × 2 × 1

Om-

Omsætninger, nemlig:

I) *c* til *ab* — *cab*, *acb*, *abc*.

II) *c* til *ab* — *cba*, *bca*, *bac*.

Ligesaa naar det fierde Bogstav *d* kommer til, kan dyt føies til enhver af disse 6 Ordener paa 4 forskiellige Maader, nemlig foran, imellem første og andet, imellem andet og tredie, samt ved Enden. Dette giver altsaa imellem fire Ting $6 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ Omsætninger. Paa samme Maade indsees, at naar det femte Bogstav kom til, vilde det kunde sættes til enhver af disse 24 Ordener paa fem forskiellige Maader, og man vilde saaledes faae $5 \times 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ Ordener. I Almindelighed vil altsaa *n* Ting give $1 \times 2 \times 3 \times \ldots n$ Omsætninger eller Ordener. Eller naar man begynder med den høieste Faktor, saa giver *n* Ting $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \ldots n-(n-1)$; thi $n-(n-1) = n-n+1 = 1$.

Exemp. Paa hvor mange Maader kunde 8 Toner afvexle med hinanden? Efter den udfundne Form $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ Maader.

I hvormange forskiellige Ordener kunde 40 Kort lægges? $40 \times 39 \times 38 \ldots 1 \times 1$, som udgiør et Tal der overstiger 2 Oktillioner.

Till.

Till. 1. Naar imellem de Ting, hvorom man vil vide, i hvormange forskiellige Ordener de kan stilles, ere nogle af een og samme Art; som f. Ex. naar imellem $n$ Bogstaver $a$ forekommer $m$ Gange og $b$ forekommer $p$ Gange, bliver Formen til at finde Omsætningernes Antal

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \ldots 3 \times 2 \times 1}{m \times (m-1) \ldots 3 \times 2 \times 1 \times p\,(p-1 \ldots 3 \times 2 \times 1}$$

Thi lad de givne Størrelser være $b$, $a$, $a$, saa skulde $a$, $a$, naar de vare forskiellige, give to Omsætninger; men da de nu er eens, saa kan $b$ med dem ikke give $3 \times 2 \times 1$, men allene $3 \times 1 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2}$ Omsætninger. Ligeledes skulde $cbbbaa$, naar alle Bogstaverne vare forskiellige, give $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ Omsætninger; var de to sidste allene de samme, og de øvrige forskiellige, faae vi $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$. Men da nu baade andet, tredie og fierde ere de samme, saa ere i det Hele kun $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$ 60 Omsætninger mulige.

Exemp. 1) De fire Bogstaver i Ordet *amor* kan omsættes $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ Gange; deraf kan man udfinde de saakaldte Anagrammer.

2) Or-

2) Ordet *studiosus* har 9 Bogstaver, hvorimellem ere tre *s* og to *u*; Antallet af deres Omsætninger er altsaa $= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$

§. 96.

Forkl. Forbindelser (combinationes) kaldes flere Tings Sammenstilling efter et vist Tal, som bestemmer Classen af Forbindelsen og kaldes Classens Exponent; da saaledes 1, 2, 3, 4, 5 og følgende Classer indeholde Unioner, Binioner, Trinioner, Qvaternioner o. s. v., eller enkelte, Amber, Terner, Qvarterner o. s. v., hvori enten enhver Ting maae igientages, eller og ingen Gientagelse maae finde Sted.

§. 97.

2den Opgave. Naar der ere givne *n* forskiellige Ting, at finde hvormange Binioner eller Amber, hvormange Trinioner eller Terner, hvormange Qvaternioner eller Qvarterner o. s. v., eller, som det og udtrykkes, hvormange Forbindelser af 2den, 3die, 4de 2c. Classe man deraf kan giøre.

Opløsn. 1. Sæt at Bogstaverne *a*, *b*, *c*, *d*, *e* 2c., i alt *n*, vare givne, og der spørges: hvor-

mange Amber eller Forbindelser af 2den Classe deraf kan giøres? Man lader da først $a$ være bort og beholder $b, c, d, e, \ldots$ eller $n - 1$ Bogstaver; med ethvert af disse giør $a$ en Ambe: man faaer da $(n-1)$ Amber. Lades $b$ ligeledes ude, saa beholder man $a, c, d, e$, og $b$ giør med ethvert af disse en Ambe, altsaa i alt $(n-1)$ Ambe. Da nu ethvert af de $n$ Bogstaver saaledes kan affsonderes og siden forenes med de øvrige $n - 1$; saa giver i Almindelighed $n$ Ting $n \times (n-1)$ Amber; saaledes

$ab,\ ac,\ ad,\ ae$
$ba,\ bc,\ bd,\ be$
$ca,\ cb,\ cd,\ ce$
$da,\ db,\ dc,\ de$
$ea,\ eb,\ ec,\ ed$

Men da $ab$ og $ba$, $ac$ og $ca$ o. s. v. kun gielder for een Ambe, saa er det klart, at det egentlige Antal af de virkelig forskiellige Amber her er $=$

$$\frac{n\,(n-1)}{1 \times 2}.$$

2. Søges de mulige Terner (eller Forbindelser af tredie Classe) af $n$ Ting, f. Ex. af de samme Bogstaver $a, b, c, d, e$; saa vilde, ligesom $(n-1)$ Ting give $\frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \times 2}$ Amber: af samme Grund bede give Amber $bc, bd, be, cd, ce, de$; sætter man

nu

nu til enhver Ambe Bogstavet $a$, saa faaer man $\frac{(n-1)\times(n-2)}{1\times 2}$ Terner. Ligesaa faaer man, naar man til Amberne af Bogstaverne $a$, $c$, $d$, $e$ sætter $b$, paa ny $\frac{(n-1)\times(n-2)}{1\times 2}$ Terner; og da dette kan igientages $n$ Gange, saa faaer man talt $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{1\times 2}$ Terner. Af de givne Bogstaver *abcde* altsaa følgende:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *abc* | *abd* | *abe* | *acd* | *ace* | *ade* |
| *bac* | *bad* | *bae* | *bcd* | *bce* | *cde* |
| *cab* | *cad* | *cae* | *cbd* | *cbe* | *cde* |
| *dab* | *dac* | *dae* | *dbc* | *dbe* | *dcd* |
| *eab* | *eac* | *ead* | *ebc* | *ebd* | *ecd* |

Man seer her igien, at da Ternerne *abc*, *bac*, *cab* og saaledes enhver Combination hvor de samme tre Bogstaver forekomme men i forskiellig Orden, kun kan gielde for een Terne; man maae derfor dividere den fundne Formel med 3, man finder da at $n$ Ting give $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{1\times 2\times 3}$ Terner.

3. Paa samme Maade findes, at $n$ Ting giver $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$ Forbindelser af 4de Classe eller Qvaterner, og overhovedet at

de give $\frac{n \times (n-1) \times (n \times 2) \ldots (n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times m}$ Combinationer af *mte* Classe.

Till. Heraf udledes denne almindelige Regel: Man søger to arithmetiske Rækker, hvori Ledenes Difference er Tallet Een; først en aftagende, hvor det første Leed er Antallet af de givne Ting; og for det andet en tiltagende, som begynder med 1. Ledenes Antal i begge bliver ligestort med Tallet, der viser, hvormange Stykker der skal combineres (ɔ: som viser, om der søges Amber, Terner 2c.). Produktet af Ledene i første Række divideres derpaa med Produktet af Ledene i den anden; og Qvotienten giver Antallet af alle muelige Combinationer.

§. 98.

Disse beregnede Former tiene til at bestemme Rimeligheden af Tab og Gevinst i de saakaldte Lykke- eller Hazardspil.

F. Ex. I) Hvor stor er Rimeligheden, at man med tre Tærninger kan kaste lutter Sexer? Da hver Tærning har sex Sider, bliver alle muelige Kast med forskiellige Øine $= \frac{18 \times 17 \times 16}{1 \times 2 \times 3} =$ 816. Imellem disse er det forlangte Kast eengang; Rimeligheden til at faae disse Øine er altsaa til Rimeligheden, ikke at faae dem, som 1 : 816.

II)

II) I det saakaldte Tallotterie bliver, som bekiendt, af 90 Nummere fem udtrukne; hvad Rimelighed er der, naar man har besat fem vilkaarlige Nummere (af de 90) til Udtræk, Ambe, Terne og Qvaterne; at erholde een af disse Gevinster? Rimeligheden til at erholde 1) Et Udtræk findes $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ ɔ: Rimeligheden til at faae et Udtræk forholder sig til den, ikke at faae det som 1 : 18.

2. En Ambe: Fem Nummere indeholde $\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ Amber, 90 Nummere indeholde $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$ Amber; Rimeligheden er altsaa til Urimeligheden som 10:4005 eller 1:400,5.

3. En Terne: I fem Nummere ere $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ Terner, i 90 ere $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} = 117480$ Terner; Rimeligheden til Ternen altsaa mod Urimeligheden som 10 : 117480 = 1 : 11748.

4. En Qvaterne: I fem Nummere ere 5 og i 90 Nummere 2554590 Qvaterner; altsaa er Rimeligheden til, i fem Nummere at faae en Qvaterne, mod Urimeligheden som 5 : 2554590 eller 1 : 510918.

III) Hvor mange forskiellige Spil ere mulige i L'hombre? Da hver af de Spillende faaer 9 Kort, bliver Svaret $= \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = 273438880$. Dette Tal maae endnu multipliceres med 3, som er de Spillendes Antal, efterdi det er ikke ligegyldigt, om man af de Spillende er den første, anden eller tredie.

Fremdeles: da 40 Kort indeholde 780 Amber og 9 Kort 36 Amber (§. 96), saa er Rimeligheden til at erholde en bestemt Ambe, f. Ex. Spadille og Basta samlede i eet Spil, mod Urimeligheden som 36 : 780 eller 1 : $21\frac{2}{3}$ ɔ: man kan omtrent regne i 22 Spil eengang at have disse to Kort samlede.

Anm. Foruden den her viste Anvendelse finder denne Regel Sted til at bestemme de mulige Tilfælde i Videnskaberne, f. Ex. alle de Maader, hvorpaa Midbelordet i en Syllogismus kan sættes.

---

# Geometrie.

---

Anden Deel.

---

## Lære om Legemer

eller

## Stereometrie.

## I. Om rette Liniers og Planers Beliggenhed mod hinanden.

(See Geometrie første Deel §. 108.)

§. 109.

**Forklaring.** En ret Linie *AB* siges at staae lodret paa en Plan *MN* (Fig. XXI. Tab. 4), naar den giør rette Vinkler med alle de rette Linier *CB*, *BG*, *BK* ꝛc., der i Planen kan trækkes igiennem Punktet *B*, hvor Linien træffer Planen.

§. 110.

**Forkl.** En ret Linies *DF* Bøining eller Helding mod en Plan *AB* (Fig. XIX) bestemmes ved den Vinkel, som den giør med en Linie *DG*, der trækkes i Planen fra Punktet *D*, hvor Linien skiærer Planen, til det Punkt *G*, hvor en fra et i Linien *FD* vilkaarligt Punkt fældet Perpendiculair træffer Planen *AB*.

Till.

Till. At denne Bøiningsvinkel bliver spids, er klart (Plan-Geometrie §. 18 Till. 3) naar man tænker sig en Plan lagt giennem Punkterne *DFG*.

§. 111.

Forklar. To Planers *MK* og *HK* (Fig. XVIII) Bøining mod hinanden bestemmes ved den Vinkel, der dannes, naar fra et Punkt *N* i deres Skiæringslinie (der bliver fælles for begge Planer) *LK*, opreises i begge Planer de lodrette Linier *NP* og *NQ*; den af disse Linier dannede Vinkel *PNQ* kaldes derfor Planernes Bøinings- (Inclinations-) Vinkel.

Till. Er denne Vinkel ret, da staaer den ene Plan lodret paa den anden.

§. 112.

Læres. Naar to Punkter *CD* af en ret Linie (Fig. XIX) ligge i en Plan *AB*, ligger hele Linien i samme Plan.

Beviis. Stykket *CD* er efter Betingelsen i Planen *AB*; sæt nu, at Linien lod sig forlænge uden for Planen, og at *DF* var et saadant uden for Planen forlænget Stykke, og man forlængede Linien *CD* i Planen til *E* (Geom. §. 3), saa havde de to rette Linier *CDF* og *CDE* Stykket *CD* tilfælles, som er umueligt.

Till.

Till. 1. En Plans Beliggenhed bestemmes ved tre Punkter, der ikke ligge i samme rette Linie; og igiennem tre givne Punkter lader sig altid lægge en Plan. Have to forskiellige Planer altsaa tre Punkter tilfælles, som ikke ligge i en ret Linie, da falde de sammen.

Anm. Et Bord paa tre Been staaer derfor altid, endog paa et ujevnt Gulv, uden at rokke.

Till. 2. Skiære to Planer hinanden, som Planen *MK* og *HK* (Fig. XVIII), da er deres Skiæringslinie *LK* en ret Linie.

## §. 113.

Læresætn. Staaer en ret Linie *AB* (Fig. XXI) lodret paa to rette Linier *CD* og *EF*, der skiære hinanden i Punktet *B*, hvor Linien berører Planen *MN*, da staaer den ogsaa lodret paa alle de rette Linier, der i samme Plan *MN* kan trækkes igiennem Punktet *B*, d. e. den staaer lodret paa Planen *MN* (§. 109).

Beviis. Man giøre $CB = BD$, $BF = BE$, trække derpaa igiennem *B* en tredie vilkorlig Linie, og Linierne *EC* og *FD*, som vil skiære den vilkorlige Linie i *G* og *K*, videre drages fra *A* Linierne *AC*, *AG*, *AE*, *AD*, *AK* og *AF*. Nu ere

1) $\triangle\ CBE = \triangle\ BFD$ (Geom. §. 12); følgelig $CE = FD$; $< BDE = < BDF$; og $< BEC = < BFD$.

2) $\triangle BGC = \triangle\ BKD$ (§. 15); altsaa $CG = KD$, og $BG = BK$.

3) $\triangle\ EAB = \triangle\ BAF$ (§. 12), derfor $EA = AF$.

4) $\triangle\ ACB = \triangle\ ABD$ (§. 12) og $AC = AD$.

5) $\triangle\ ACE = \triangle\ ADF$; thi $CE = FD$ (No. 1) $AC = AD$ og $AE = AF$ (No. 3 og 4), altsaa $< ADK = < ACG$.

6) $\triangle\ ACG = \triangle\ ADK$, da $CG = KD$ (No. 2) $CA = AD$ No. 4) og $< ACG = < ADK$ (No. 5), følgelig $AG = AK$.

7) Nu er $AG = AK$ (No. 6), $BG = BK$ (No. 2), $AB = AB$, følgelig (§. 14) $\triangle\ AGB = \triangle\ ABK$ og $< ABG = < ABK = R$ (§. 7) og Linien $AB$ lodret paa $GB$ og $BK$.

Paa samme Maade kan bevises, at $AB$ er lodret paa enhver igiennem Punktet $B$ i Planen $MN$ trukket ret Linie, og altsaa lodret paa Planen $MN$.

Anm. Dette er det Euclidiske Beviis, saaledes som det findes i hans Element. (II B. 4 S.), som i mine Tanker er for denne Sætning det eeneste strængt mathematisk rigtige; dog tilstaaer jeg, at man gierne kan

kan for Begyndere, for hvilke Oversigten af dette Beviis maaskee kunde være vanskelig, giøre Sætningen begribelig paa en anden Maade, nemlig ved at tænke sig en Plan lagt igiennem Punkterne *ABD*, der da vilde blive en retvinklet Triangel, og forestille sig den omført i Planen *MN*; blev nu Linien *BD* i samme Plan og *AB* ubevægelig, vilde *BD*, naar den efterhaanden kom i Beliggenhederne *BE*, *BG*, *BC*, dog stedse blholde samme Stilling mod *AB* ɔ: stedse giøre med *AB* en ret Vinkel.

§. 114.

Læresætn. Staaer en Linie *AB* (Fig. XXI) lodret paa tre forskiellige rette Linier *BG*, *BD* og *BF*, der støde sammen i Punktet *B*, da ligge disse Linier alle i een og samme Plan.

Beviis. Man forestille sig en Plan *MN* lagt igiennem Punkterne *GBD* (§. 112. Till.). Var nu *BF* ikke i denne Plan, men udenfor, saa forestille man sig en anden Plan, lagt igiennem *ABF*, som, tilbørlig forlænget, maatte skiære Planen *MN* i den rette Linie *BK* (§. 112. Till. 2). Men efter Betingelsen er *AB* lodret paa *BG* og *BD*, altsaa ogsaa paa *BK* (§. 113), følgelig $< ABK = R = < ABF$, som er umueligt. (Arithm. §. 38. No. 2).

Till. 1. Fra et Punkt udenfor en Plan kan kun fældes en eeneste lodret Linie paa Planen; thi

sæt (Fig. XXI), at foruden $AB$ ogsaa $AE$ var lodret paa Planen $MN$, saa var i Trianglen $ABE$ Vinklen $AEB = R = ABE$, som er umuelig (§. 18. Till. 3).

Till. 2. Den lodrette Linie $AB$ er kortere end enhver anden fra Punktet $A$ paa Planen $MN$ fældet Linie.

## §. 115.

Læresæt. I) Staae to Linier $AB$ og $CD$ lodrette paa een og samme Flade $MN$, da ere de parallele; II) ere de derimod parallele, og den eene staaer lodret paa Fladen $MN$, da staaer den anden ogsaa lodret paa samme Flade.

Beviis 1. Man drage (Fig. XVII) i Planen $MN$ Linien $BD$, og opreise paa Enden af den den lodrette Linie $DG = AB$ og trække $BG$, $AG$ og $AD$, saa er $\Delta\, ABD = GDB$ (§. 12) og $AD = BG$; da nu altsaa $AB = DG$ og $AG$ tilfælles, saa er $\Delta\, ABG = \Delta\, ADG$, følgelig $< GDA = < GBA = R = < GDB = < GDC$ (§. 109) og Linierne $GD, DA, DB$ i een og samme Plan (§. 114), i hvilken ogsaa $AB$ er.

Linierne $AB$ og $CD$ ere altsaa i een og samme Plan, og da Vinklerne $ABD + CDB$ ere $= 2R$, ere de parallele.

2. Man

2. Man trække de samme Forberedelses Linier som før, og man faaer Winkelen $GDA = R$, følgelig $GD$ lodret paa Planen $BDA$ (§. 109); i samme Plan er ogsaa Parallelen $CD$, altsaa naar $< ABD = R$, er ogsaa $< CDB = R$ og saaledes $CD$ lodret paa Planen $MN$.

## §. 116.

Læres. To rette Linier $AD$ og $BF$ (Fig. XXIII), der ere parallele med en tredie $CE$ (om den endog ikke ligger i samme Plan) ere indbyrdes parallele.

Beviis. Man opretter fra et Punkt i Linien $CE$ to lodrette Linier, den ene $CA$ i Planen $CD$, den anden $CB$ i Planen $CF$, saa er Linien $EC$ lodret paa en Plan lagt igiennem Punkterne $ACB$ (§. 113), følgelig ogsaa dens Paralleler $AD$ og $BF$ lodrette paa Planen $ACB$ (§. 115. No 2), og altsaa $AD$ og $BF$ selv parallele (§. 115. No. 1).

## §. 117.

Læresæt. To Vinkler $ACB$ og $DEF$ (Fig. XXIII), der ligge i forskiellige Planer, hvori $AC$ er parallel med $DE$, og $CB$ med $EF$, og have samme Beliggenhed mod den Linie $EC$, der forbinder deres Toppunkter, ere lige store.

Beviis.

Beviis. Man gior $DE = AC$, $EF = CB$, og trække Linierne $AB$, $DF$, $FB$ og $DA$, saa ere $AD$ og $BF$ parallele med $CE$, følgelig selv parallele og ligestore (§. 30), og altsaa $AB = DF$; følgelig $\Delta BCB = \Delta DEF$ og Vinklen $ACB = < DEF$.

§. 118.

Opgave. Fra et givet Punkt $N$ udenfor en Plan $CD$ (Fig. XX) at fælde en lodret Linie paa Planen.

Opløsn. I Planen $CD$ trækker man en vilkaarlig Linie $AB$ og lader derpaa fra det givne Punkt $N$ falde en lodret Linie $NP$; fra Punktet $P$ oprettes i Planen $CD$ en lodret Linie $PM$, fra $N$ fældes derpaa en lodret Linie $NR$ paa $PM$, som da vil være lodret paa Planen $CD$.

Beviis. Igiennem $R$ trækkes en Linie $KL$ parallel med $AB$. Efter Constructionen staaer $PB$ lodret paa $PR$ og $PN$, altsaa ogsaa paa Planen $NPR$ (§. 113), og følgelig $KL$ lodret paa samme Plan; saaledes er Vinklen $LRN = R$, men efter Construction var $NRP = R$, og følgelig $NR$ lodret paa Planen $CD$.

Till.

Till. Fra et Punkt *M* i en Plan opreises en lodret Linie *MO*, naar man fra et Punkt *N* udenfor Planen fælder en Linie *NR* lodret paa Planen og giør Linien *MO* parallel med *NR*.

§. 119.

Forkl. Planerne *CD* og *AB* (Fig. XXV Tab. 5) kaldes parallele, naar de, i hvor langt de end forlænges, aldrig skiære hinanden.

Till. 1. Skiæres disse parallele Planer med en tredie Plan *EF*, da ere Giennemsnitslinierne *GK* og *LO* parallele, thi de ligge begge i een Plan, nemlig i Skiæringsplanen *EF*, men de ligge tillige hver i sin af de andre to Planer, og kunde altsaa forlængede aldrig møde hinanden uden at de to parallele Planer stødte sammen, som er imod Forklaringen og Betingelsen.

Till. 2. Staaer een og samme rette Linie lodret paa to forskiellige Planer, da ere de parallele; thi vare de ikke parallele, vilde de forlængede skiære hinanden som Planerne *CD* og *EF* (Fig. XX Tab. 4), og da kunde een og samme Linie ikke være lodret paa dem begge. Fra et vilkaarligt Punkt *N* i den ene Plan *EF* fældes en lodret Linie *NR* paa den anden *CD*, i Planen *EF*, trækkes fra *N* til Giennemsnitslinien *AB* en vilkaarlig Linie *NP* og i *CD* Linien *PR*. Var nu *NR* ogsaa lodret

paa Planen *EF*, saa var der i Triangelen *NPR* to rette Vinkler, som efter de forhen beviiste Sætninger er umuligt.

§. 120.

Opgave. Igiennem et givet Punkt *A* udenfor Planen *BC* (Fig. XXVII) at lægge en Plan, parallel med *BC*.

Oplosn. Fra *A* fældes paa *BC* den lodrette Linie *AD* (§. 118), i *BC* trækkes de vilkaarlige Linier *DF*, *DE*, og igiennem *A* Linien *AH* parallel med *DF* og *AG* parallel med *DE*. En Flade, lagt giennem *AHG*, vil da være parallel med *BC* (§. 119), thi *DA* er ogsaa lodret paa *HAG* (§. 109) (thi da den er lodret paa *bC*, saa er $\angle ADF = R$, altsaa $\angle DAH = R$; ligeledes er $\angle ADE = R$, følgelig og $DAG = R$).

Till. 1. Igiennem et Punkt kan kun lægges een Plan parallel med en anden.

Till. 2. Ere to Planer parallele og en ret Linie er lodret paa den eene af dem, da er den tillige lodret paa den anden; to lodrette Linier imellem to parallele Planer ere parallele og ligestore.

§. 121.

Læresæt. Staaer Linien *AD* (Fig. XXIV) lodret paa Planen *BC*, saa er en Plan, lagt igien-

igiennem Linien *AD*, ligeledes lodret paa *BC*.

**Beviis.** Lad *EF* være Linien, hvor den giennem *AD* lagte Plan skiærer *BC*; fra et vilkorligt Punkt *G* i Fladen *BC* trækkes Linien *DG* lodret paa *EF*, saa er $\angle ADG = R$ (§. 109), men Vinklen *ADG* er Boiningsvinklen for Planerne (§. 109. Till.); de ere altsaa lodrette paa hinanden.

**Modsætn.** Staaer en Plan *FH* (Fig. XXIV) lodret paa en anden Plan, saa er en i Planen *FH* paa Giennemsnitslinien *EF* fældet lodret Linie *AD* ogsaa lodret paa Planen *BC*.

**Beviis.** Man trækker den lodrette Linie *DG*, saa er Vinklen *ADG* (Planernes Boiningsvinkel) $= R$ og $\angle ADF = R$ (efter Tegning), følgelig Linien *AD* lodret paa Planen *BC* (§. 109).

## §. 122.

**Læres.** Overskiæres to parallele Planer *AB* og *CD* (Fig. XXV) af en tredie *EF*, saa ere Boiningsvinklerne, *HMN* og *HPQ*, som den skiærende Plan gior med begge de parallele Planer, ligestore.

**Beviis.** Linierne *GH* og *LO* ere parallele (§. 119); man antager *HM* at staae lodret paa *GK* og *HP* paa *LO*, og tænker sig igiennem *H3* lagt en Plan lodret paa *EF* (§. 121), den vil da skiære

de to parallele Planer *CD* og *AB* i Linierne *MN* og *PQ*. Vinklerne *HMN* og *HPQ* blive da den skiærende Plans Boiningsvinkler mod de parallele Planer, og blive ligestore.

§. 123.

Læref. Naar to Planer *AM* og *CN* (Fig. XXVI), det skiære hinanden i Linien *GH*, ere lodrette paa en tredie *EF*, saa er ogsaa deres Skiæringslinie *GH* lodret paa *EF*.

Beviis. Man opreise paa *HN* (ɔ: Giennemsnitslinien af Planerne *CN* og *EF*) en lodret Linie *HK*, og paa *HM* (Giennemsnitslien af Planerne *AN* og *EF*) en lodret Linie *HL*, saa er *HK* lodret paa Planen *CN* (§. 121), ligeledes *HL* paa Planen *AM*, følgelig $< GHK = R = < GHL$ og Linien *GH* lodret paa *EF* (§. 109).

---

## II. Om geometriske Legemer i Almindelighed.

§. 124.

Forkl. Et til alle Sider begrændset Rum kaldes et geometrisk Legeme (§. 1); disse Grændser, der ere Flader, rette eller krumme, bestemme Legemets Figur.

Till.

Till. 1. En eeneste ret Flade eller Plan kan følgelig ikke indslutte noget bestemt legemligt Rum, men behørig udvidet deler den ethvert Rum i to Dele.

Till. 2. Endog to eller tre Planer kunde ikke indslutte noget Legeme. Man tænke sig f. Ex. en Plan *CBD* (Fig. XXXVIII. a.), man lægge igiennem dens ene Sidelinie en anden Plan *ACB*, og lægge endvidere igiennem Punkterne *ACD* en tredie Plan *DCA*, saa vil endnu denne tilligemed de to forrige ikke indslutte noget Rum, men dertil udfordres endnu en fierde Plan, som maae overskiære de tre nævnte Planer et eller andet Sted, f. Ex. i Punkterne *A*, *D*, *B*.

§. 125.

Forkl. Ved det saaledes frembragte Legeme *ACDB* (Fig. XXXVIII. a.) kaldes dets Grændser, som ere Fladerne *ACB*, *ACD* ꝛc., Sideflader, og Linierne *AC*, *BC* o. s. v. Sidelinier. Er som her alle Sidefladerne Planer eller rette Flader, kaldes det et kantet Legeme. En Kant, et Hiørne; eller som det og udtrykkes, en solid Vinkel dannes i ethvert Punkt paa Legemets Overflade, hvorigiennem tre eller flere Planer ere lagte, som her i Punkterne *C*, *A*, *B*, *D*.

Till.

Till. En solid eller legemlig Vinkel kunde ogsaa defineres saaledes: at den dannes, naar to eller flere Planer skiære hinanden saaledes, at deres Skiæringslinier løbe sammen i et Punkt, der da bliver den solide Vinkels Top-Punkt, eller og, naar tre eller fire rette Linier, hvoraf dog kun to ligge i samme Plan, støde sammen i et Punkt, som da og kan kaldes den solide Vinkels Spidse eller Toppunkt.

Anm. 1. Man kan forestille sig den solide Vinkel *A* (Fig. XXXVIII. a) saaledes, at Punktet *A* tænkes over Fladen af Papiret, og at derfra vare trukne Linierne *AC*, *AD*, *AB* i forskiellige Planer ned paa Papirets Plan; efter Antallet af disse Linier (der tillige bestemme Antallet af de plane Vinkler, der indslutte den solide Vinkel), kaldes den solide Vinkel tresidet, firesidet o. s. v.

Anm. 2. En solid Vinkels Størrelse og Egenskab bestemmes ved Antallet af de plane Vinkler, der danne den, og ved Fladernes Bøining mod hinanden.

Anm. 3. Summen af alle de plane Vinkler, der støde sammen for at danne en solid Vinkel, er altid mindre end fire rette Vinkler.

§. 126.

Endnu paa mangfoldig forskiellige Maader kunde Planer lægges saaledes mod hinanden, at de indslutte et legemligt Rum; men af disse blive her

kun

kun de mærkeligste, hvis Udmaaling den elementaire Geometrie kan lære, anførte og beregnede.

Lad til Ex. *ABCDE* (Fig. XXVIII. b.) være en i en Plan liggende retlinet Figur. Man opreise Linien *Aa* under en vilkaarlig Bøining mod Planen *MN*. Igiennem *Aa* og *B* lægge man en Plan, hvori man giør *Bb* parallel med *Aa*. Ligeledes lægge man igiennem *Bb* og *C* en Plan, hvori man giør *Cc* parallel med *Bb*; og ved saaledes at vedblive igiennem alle Vinkelspidserne i den plane Figur *ABCDE*, faaer man Planerne *Ab*, *Bc*, *Cd*, *De* og *Ea* og Parallellinierne *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd* og *Ee*. Nu lægger man igiennem Punktet *a* Fladen *abcde* parallel med *ABCDE*, og der er nu et indsluttet legemlig Rum, der kaldes et Prisme (en kantet Pille, Støtte. De parallele Flader *ABCDE* i Planen *MN* og *abcde* i Planen *OP* kaldes Grundflader; de øvrige Flader, som *Ab*, *Bc* o. s. v., kaldes Sideflader, og efter deres Antal faaer Prismet Navn af et tresidet, firesidet eller mangesidet Prisme. Høiden af et Prisme er den lodrette Linie imellem begge Grundfladerne eller Grundfladernes Afstand fra hinanden.

Till. 1. Da Grundfladerne ere parallele, og følgelig deres og Sidefladernes Giennemsnitslinier *AB* og *ab*, *BC* og *bc* ogsaa parallele (§. 120), og

og Giennemsnitslinierne af Sidefladerne *Aa Bb* 2c. ogsaa parallele, saa ere Sidefladerne i et Prisme altid Parallelogrammer.

Till. 2. Naar de parallele Sidelinier i et Prisme, og følgelig ogsaa Sidefladerne (§. 121), staae lodrette paa Grundfladerne, kaldes det et ret, i modsat Tilfælde et skiævt Prisme. I det rette Prisme er Sidefladernes Høide tillige Prismets Høide.

Till. 3. Ere Grundfladerne i et Prisma Parallelogramer, kaldes det et Parallelepipedon, som altsaa er et af sex Parallelogramer indsluttet Legeme.

Till. 4. Er et Parallelepipedon ret (Till. 2) og alle sex Flader, hvoraf det indsluttes, ligestore, kaldes det en Kubus eller Terning, der altsaa er et Legeme som indsluttes af sex ligestore Qvadrater.

## §. 127.

Bliver Grundfladen, som antoges retlinet (§. 126), til en uendelig mangekantet Polygon ɔ: til en Cirkel (§. 101), hvis Middelpunkt er *F* (Fig. XXXIX), saa trækker man en Linie *FG* under en vilkaarlig Bøining mod Planen *AB* indtil den skiærer den med *AB* parallele Flade *CD* i *G*. Fra et Punkt i Peripherien af Grundfladen *E* trækker man

Linien

Linien *EH* parallel med *GF*, saa bliver Giennemsnitslinierne af Fladen *ACGF* og Fladerne *AH* og *EG* ɔ: Linierne *CG* og *AF* parallele (§. 120). Det samme gielder for enhver anden Linie, der trækkes paa samme Maade som f. Ex. *DB*. Alle Endepunkter af disse Linier i Fladen *CD* ere i Omkredsen af en Cirkel, hvis Centrum er *G*, og som er ligestor med Grundfladen. Lægges nu igiennem Peripherien af begge Cirkler en krum Flaade saaledes, at alle med *GF* i en Afstand saa stor som Radius *FA* eller *FB* trukne Paralleler falde i denne krumme Flade, saa vil den tilligemed begge Cirklerne indslutte et legemligt Rum, der kaldes en Cylinder eller Rulle (Valse). Begge de parallele Cirkler kaldes dens Grundflader, den krumme Flade den cylindriske Overflade. Linien *GF*, der forbinder begge Cirklernes Centra, faaer Navn af Cylinderens Axel. Er denne Axel lodret paa Grundfladen, faaer Cylinderen Navn af ret (Fig. XXXVIII) i modsat Tilfælde skiæv (Fig. XXXIX).

Till. 1. Man kan forestille sig, at en Cylinder bliver til i det Cirklen *CHD* bevæger sig ned mod Cirklen *AEB* saaledes, at dens Flade stedse bliver parallel med sig selv. En ret Cylinder dannes, naar en Rectangel dreier sig om dens ene Sidelinie som om en ubevægelig Axel.

Till.

Till. 2. Antages *AE* uendelig lille (mindre end enhver nok saa liden given Størrelse), saa kan man antage *AEHC* som en uendelig lille Flade, og den cylindriske Overflade at bestaae af lutter saadanne uendelig smaae Flader, d. e. Cylinderen kan antages at være et uendelig mangesidet Prisme.

§. 128.

Forestiller man sig en solid Vinkels Sideflader (Fig. XXXVIII. a.) *ACB*, *BCD* og *ACD* at overskiæres af en Plan *ADB*, saa fremkommer et begrændset legemlig Rum (geometrisk Legeme), der kaldes en Pyramide. Fladen *ABD* kaldes Grundflade, og Fladerne *ACB*, *BCD* og *ACD* Pyramidens Sideflader. Sidefladernes Antal, der rette sig efter Grundfladens Sidelinier, bestemmer Navnet af tresidet, firesidet og mangesidet Pyramide.

Anm. Er den solide Vinkel, hvis Sideflader overskiæres, kun indsluttet af tre Planevinkler, som i nærværende Exempel, da sees let, at hele Legemet indsluttes af fire Triangler, og at det er ligegyldigt, hvilken der ansees for Grundflade, da man kan tænke sig Pyramidens Toppunkt saavel i *A*, *B* og *D*, som i *C*.

Till. 1. En Pyramide er altsaa et legemligt Rum, der indsluttes af en retlinet Plan-Figur,

som

som kaldes Grundflade, og saa mange Triangler, Sidefladerne, som Grundfladen har Sider, der alle støde sammen i et Punkt udenfor Grundfladen, der kaldes Pyramidens-Spids eller Top. En lodret Linie, fældet fra dette Toppunkt, som *RE* (Fig. XXXII), bestemmer Pyramidens Hoide. Er Grundfladen en regulair Plan-Figur og den perpendiculaire Linie fra Pyramidens Top træffer lige i dens Centrum (§. 55. Anm.) da kaldes Pyramiden ret, i modsat Tilfælde skiæv.

Till. 2. Tænkes Grundfladen i Pyramiden at blive en uendelig mangekantet regulair Figur ɔ: en Cirkel, da vil alle Pyramidens Sideflader, der vilde være uendelig mange smaae Triangler, udgiøre en eeneste krum Flade, hvori alle de rette Linier vilde falde, der kunde trækkes fra Pyramidens Top til ethvert Punkt i Cirklens Omkreds. Et saadant bestemt legemligt Rum kaldes en Kegle (conus) (Fig. XL), Cirklen *AG* Grundfladen, rette Linier fra forskiellige Punkter i Cirklens Peripherie som *AK* og *GK*, til Toppunktet faae Navn af dens Sider eller Sidelinier. Linien *CK* fra Cirklens Centrum til Toppen kaldes Keglens Axel. Staaer denne Axel lodret paa Grundfladen, er Keglen ret, i modsat Tilfælde skiæv. Ved Hoiden i en Kegle forstaaes Toppunktets Afstand fra Grundfladen,

fladen, der i den rette Kegle er Axlen selv, men i den skiæve en fra Toppen paa den forlængede Grundflade fældet lodret Linie, der altid er mindre end Axlen.

Till. 3. Den rette Kegle *AKG* (Fig. XL) kan man forestille sig at blive til, naar den retvinklede Triangel *AKC* dreier sig om sin ene Cathete *KC* som en ubevægelig Axel.

§. 129.

Tænkes en Halvcirkel *AKFHB* (Fig. XLIV) at dreie sig om sin ubevægelige Diameter *AB* indtil den igien kommer i sin første Beliggenhed, saa er det legemlige Rum, igiennem hvilket den har bevæget sig, en Kugle (sphæra). Peripherien af Halvcirklen har beskrevet Kuglens krumme Overflade; alle Punkter i denne, som *H*, *F*, *K*, ligge derfor ligelangt fra Centrum i Halvcirklen, der tillige er Kuglens Center, da deres Afstand derfra er Halvcirklens Radius; enhver saadan Afstand fra Kuglens Centrum til Overfladen kaldes Kuglens Radius, og det dobbelte deraf Kuglens Diameter.

Till. 2. En Kugle kunde ogsaa defineres at være, et legemligt Rum, indsluttet af en eeneste krum Flade, hvori ethvert Punkt er lige langt fra et vist Punkt inde i Kuglerummet, der kaldes Centrum.

Till.

Till. 2. Linier, der ere lodrette paa Axlen, som $IL$, $GC$, $NF$ (Fig. XLIII), vil ved deres Omereining om $AD$ beskrive Cirkler, der blive parallele med hinanden.

---

## III. Om Prismer og Cylindere og deres Udmaaling.

§. 130.

Læres. Prismer, hvis Gruudflader ere ligedanne og ligestore (congruente), og hvis Sidesflader have samme Bøining mod Grundfladerne, og hvis Høider ere ligestore, passe i hinanden (congruunt).

Beviis. Lægges Grundfladen af det ene paa Grundfladen af det andet, saa falde Sidefladerne, da de ere antagne at have samme Bøining mod Grundfladerne, ogsaa sammen; og da de øverste Endepunkter af Sidelinierne alle falde i een Plan, saa falder og den anden Grundflade af det ene sammen med den af det andet Prisme ɔ: alle Grændser af begge Prismer falde sammen d. e. de passe i hinanden.

(§. 58. Till. 1), og følgelig Prism. $ACBc$ : Prism. $acbE = Aa : aD$.

Beviis 2) Da efter Betingelsen $acb$ er parallel med $ACB$, og $Aa$ parallel med $Bb$, saa er $Ab$ et Parallellogram og $AB = ab$; ligesaa $AC = ac$ og $CB = cb$, altsaa $\Delta\ acb = \Delta\ ACB$.

Till. Prismer paa congruente Grundflader, mod hvilke deres Sider have samme Bøining, forholde sig som deres Sider, følgelig ogsaa som de lodrette Linier, der kunde fældes imellem deres Grundflader. Er Prismet ret, ere disse lodrette Linier selv Sidelinier.

## §. 133.

Læresl. Parallelepipeda, der staae paa samme Grundflade $ABCD$ (Fig. XXX) og have samme Høide eller staae imellem to parallele Planer, ere ligestore.

Beviis 1) Antage vi, at Parallelepipederne ere $AG$ og $AK$, og at deres Sideflader $BG$ og $BM$, $AH$ og $AK$ ligge i de parallele Planer $EBCM$ og $FADK$, saa sees let, at de tresidede Prismer $FAILEB$ og $HDKMGC$ paa Fladerne $FAI$ og $HDK$ ere ligestore (§. 130 og §. 34). Borttages

tages nu fra begge disse det tresidede Prisme *HOILGN* og til begge lægges Prismet *AODCNB*, saa har man Parallelep. *AG* = Parallelep. *AM*.

Beviis 2) Antages Parallelepipederne over Grundfladen *ABCD* at være *AG* og *Am*, og altsaa Fladerne *BG* og *Bm*, *AH* og *Ak* ikke at ligge i samme Plan, da tegnes et Parallelepiped *AM*, hvis Sider *BM* og *AK* ligge i samme Planer som *BG* og *AH* i Parallelepipedet *AG*, men Siderne *DM* og *AL* i samme Planer som *Dm* og *Al* i Parallelepip. *Am*, saa er det klart af Beviis 1, at Parallelep. *AM* = Parallelep. *AG*, og ligesaa Parallelep. *AM* = Parallelep. *Am*, følgelig og *AG* = *Am*.

Till. 1. Saavel for Parallelepipeder som for Prismer i Almindelighed, at de, naar de staae paa samme eller ligestore Grundflader og have samme Høide, ere ligestore; kunde Beviset maaskee fatteligere, skiøndt mindre strengt, føres saaledes. Ethvert Snit i et Prisme, parallel med Grundfladen, frembringer en Plan ligestor med Grundfladen (§. 132), hvor end Snittet skeer; giøres altsaa flere parallele Snit igiennem to saadanne Prismer eller Parallelepipeder (thi ethvert tresidet Prisme er Halvparten af et Parallelepiped, der har samme Høide og dobbelt saa stor Grundflade (§. 131. Till.),

 der

der have samme eller ligestore Grundflader, blive alle disse ved Snittene frembragte Flader ligestore, og saaledes de to Udstrækninger af Prismerne ligestore overalt; men Høiden var antaget ligestor, altsaa alle tre Udstrækninger af to saadane Prismer eller Parallelepipeder ligestore. Men to legemlige Rum, der have alle tre Udstrækninger ligestore, ere fuldkomne ligestore.

Anm. Saaledes findes Beviset ført i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger.

Till. 2. Ogsaa kunde denne Sætning saaledes bevises: Man tænke sig begge Parallelepipeder eller Prismer giennemskaarne med Planer i en uendelig liden Afstand fra hinanden; derved vilde i dem begge frembringes ligemange uendelig smaae Parallelepipeder eller Prismer, der vilde blive ligestore (§. 130). Men ligemange ligestore Elementer eller Dele maae frembringe ligestore Hele.

§. 134.

Lærds. Parallelepipeder paa ligestore, men ikke ligedanne Grundflader ere ligestore (ɔ: indslutte ligestore Rum), naar de have ligestore Høider.

Beviis 1. Lad de ligestore Grundflader i begge Parallelepepeder *ACCDB* og *DEGF* (Fig. XXX.

XXX. a.) antages at have ligestore Vinkler, de lade sig da let bringe i en saadan Beliggenhed mod hinanden som Figuren viser; ere nu Sidefladerne over *CD* og *DG* og over *DB* og *DE* i samme Planer, og disse forlanges, da vil Prismet over Grundfladen *AHI* være = Prismet over *IHF* (§. 132); borttages nu fra begge disse de ligestore Prismer over *DBI* og *DIG* samt over *DCH* og *DEH*, saa blive tilbage Parallelepipederne over Grundfladerne *ACDB* og *DEFG*, der saaledes maae være ligestore. (Arithm. §. 38. 4). Have Sidefladerne i de givne Parallelepipeder ikke den her anførte Beliggenhed, da kan for de givne substitueres andre Parallelepipeda, hvor Sidefladerne have den anførte Beliggenhed (§. 133) og Beviset dog blive gieldende; saaledes kunde i Stedet for Grundfladen *ACDB* substitueres Grundfl. *CKLD*.

Beviis 2. Vare Grundfladerne i de givne Parallelepipeda vel ligestore, men ikke ligevinklede som *KCDL* og *DEFG* (Fig. XXX. a.), saa forvandles *KCDL* til *ACDB* (§. 36), som er ligevinklet med *DEFG*. Nu er Parallelepipedet over *KCDL* ligestort med det over *ACDB*, naar de efter Betingelsen have samme Høide (§. 133), og Parallelepipedet over *ACDB* = Parallelepipedet over *DEFG*, altsaa Parallelepipedet over *KCDL* = Parallelepipedet over *DEFG*.

§. 135.

Læref. To Parallelepipeda $P$ og $\Pi$, der have forskiellig Længde, Brede og Høide (Fig. XXXIV. a-b.) forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længde, Brede og Høide, eller ere i et sammensat Forhold af deres Længde, Brede og Høide.

Beviis. Da alle Parallelepipeda kan forandres til retvinklede (§. 134), saa fører jeg allene Beviset for disse.

Man construerer et Parallelepiped $p$ (Fig. XXXIV. c.), hvis Høide $KM = CD$, Brede $IK = AC$, Længde $KL = FG$, og et Parallelepiped $\pi$ (Fig. XXXIV. d.) hvis Høide $OQ = KM = CD$, Brede $NO = EF$, Længde $OP = KL = FG$. Nu sammenlignes først $P$ med $p$, og da Fladen $AD = LM$ (ved Construction), saa er $P:p = AB:KL$ (§. 132. Till.) Derpaa sammenlignes Parallelepipedet $p$ med $\pi$, og da her (ligeledes ved Construction) $OQ = KM$ og $OP = KL$, saa er Fladen $KF = OS$. Antages nu disse for Grundflader, saa er $p : \pi = IK : NO = AC : EF$ (§. 132. Till.).

Fremdeles: Sammenlignes Parallelepipedet $\pi$ med $\Pi$, i hvilke $OP = FG$, $NO = EF$ (ved Construction), altsaa Fladen $FN = OM$;

anta-

antages disse for Grundflader, saa have vi (§. 132 Till. $\pi : \Pi = OQ : FH = CD : FH$. Vi have altsaa følgende Proportioner:

$$P : p = AB : KL = AB : FG$$
$$p : \pi = KI : NO = AC : EF$$
$$\pi : \Pi = NR : FH = CD : FH$$

altsaa $P : \Pi = (AB \times AC \times CD) : FG \times EF \times FH)$ (Arithm. §. 74. Till. 1) ɔ: Parallelepipederne $P$ og $\Pi$ forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længder, Breder og Høider.

Till. 1. Antages nu $AB = FG$, $AC = EF$, saa vilde (Arithm. §. 73. Anm.) $P : \Pi = CD : FH$ ɔ: Parallelpipeda, hvis Længde og Brede ere ligestore, forholde sig som deres forskiellige Høider (eller naar i to Parallelepipeder de to Dimensioner ere ligestore, forholde de sig som den tredie).

Till. 2. Antages $(AB \times AC) = (FG \times EF)$, saa er $P : \Pi = CD : FH$; eller antages $(AC \times CD) = (EF \times FH)$, saa er $P : \Pi = AB : FG$ ɔ: naar Grundfladerne ere ligestore, forholde Parallelepipeder sig som deres forskiellige Høider; ere derimod Høiderne ligestore, forholde Parallelepipederne sig som deres forskiellige Grundflader; thi vi havde $P : \Pi = (AB \times AC \times CD) : (FG \times EF \times FH)$. Antages nu $CD = FH$,

$= FH$, saa er $P : \Pi = (AB \times AC) : (FG \times EF) = AK : FN$.

Till. 3. Antages i Parallelepipedet $P$, $AB = AC = CD$, og i $\Pi$ ligeledes $FG = FE = FH$, og begge at være retvinklede, saa ere de Cuber eller Tærninger (§. 126 Till. 4). Da vi have beviist, at $P : \Pi = (AB \times AC \times CD) : (FG \times FE \times FH)$, saa er under dens Betingelse $P : \Pi = AB^3 : FG^3 = AC^3 : FE^3 = CD^3 : FH^3$ ɔ: forskiellige Cuber eller Tærninger forholde sig til hinanden som Cubiktallene af deres Sidelinier.

Till. 4. Hvad i denne og foregaaende §. er lært om Parallelepipeda gielder om alle Arter af Prismer; thi et tresidet Prisme er Halvparten af et Parallelepipedum der har samme Høide (§. 131); hvad der altsaa gielder om det Hele, gielder og om dets Halve. Men et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) kan, naar dets Grundflade $ABCDE$ ved Diagonaler inddeles i Triangler og over Diagonalerne tænkes tegnede Parallelogramer, deles i saamange tresidede Prismer som Grundfladen har Triangler: hvad der nu gielder om ethvert af disse Prismer især, gielder og om deres Summa, som er det mangesidede Prisme. Denne almindelige Sætning er saaledes beviist: at Prismer, der staae

hver ligestore Grundflader og have ligestore Høider, ere ligestore.

§. 136.

Forkl. At udmaale en given Størrelse er egentlig at bestemme Forholdet imellem den og en vis antagen bekiendt Størrelse af samme Art, der kaldes Maal eller Maalestok (§. 93). Til Legemers eller legemlig Ruims Udmaaling har man antaget Terningen til Maal eller Maalestok: og at udmaale et Parallelepipedum, Prisme o. s. v. er ikke andet, end at bestemme, hvor ofte en antagen Terning (der kaldes en Kubikfod, Kubiktomme, Kubikalen o. s. v., eftersom enhver af dens Sidelinier er en Fod, Tomme eller Alen) kan indeholdes eller omlægges deri; eller at finde Forholdet imellem den antagne Terning og det givne Parallelepipedum.

§. 137.

Opgave. At beregne Indholden af, eller at udmaale et retvinklet Parallelepipedum Π (Fig. XXXIV. a).

Opløsn. Man maaler Grundfladens Længde *FG*, Brede *EF* og Parallelepipedets Høide, som er den lodrette Linie *FH*, med samme Længdemaal; de derved fundne Tal multipliceres med hinanden, og Produktet er et Tal, som viser hvor mange Gange

Gange den antagne Tærning, hvis Sidelinier bruges til at udmaale Længde, Brede og Høide, indeholdes i det givne Parallelepiped. Da Productet af Længde og Brede giver Grundfladens Indhold i Qvadratmaal (§. 96), saa kan Reglen for Beregningen ogsaa udtrykkes saaledes: man multipliceret Grundfladens Qvadrat-Indhold med Parallelepipedets lodrette Høide.

Beviis. Maalestokken være Tærningen *KE* (Fig. XXXI), hvis Side *KN* antages for Eenheden (Fod, Tomme, Alen), saa have vi følgende Proportion (§. 136):

Tærningen *KE* : Parallelep. $\Pi = KN \times NM \times ME : EF \times FG \times FH = 1 : EF \times FG \times FH$ ɔ: Produktet af Parallelepipedets Længde, Brede og Høide udtrykker, hvor ofte den antagne Tærning kan indeholdes eller omlægges i Parallelepipedet.

Anderledes. Er Tærningens Sidelinie det antagne Længdemaal, saa maae der kunde paa Parallelepipedets Grundflade eller i et Lag sættes saa mange Tærninger som Productet af Linierne *FG* og *EF* angiver (§. 96); men af saadanne Lag maae der kunde være saa mange som Høiden *FH* indeholder Dele; multipliceres derfor det fundne Product (Antallet af Tærninger i et Lag) med Høiden (Antallet af Lag), saa udkommer Mængden af de

Tær-

Terninger, der opfylde det hele legemlige Rum af det givne Parallelepiped.

Lad f. Ex. Længden af Grundfladen $FG$ være $= 7,6^1$, Breden $EF = 4,31^1$, Høiden af Parallelepip. $FH = 8,9^1$, saa er Indholdet $= 7,6^1 \times 4,31^1 \times 8,9^1 = 291,5284$ Kubikfod.

Till. 1. Var det givne Parallelepipedum en Kubus, og altsaa alle dens Sidelinier ligestore ɔ: $FG = FE = FH$, saa vilde, efter den anførte Opløsning, dets Indhold være $= FG \times FG \times FG = FG^3$ d. e. Man finder paa Grund heraf den legemlige Indhold af en Terning ved at maale een af dens Sidelinier og kubere det fundne Tal (Arithm. §. 52). Sættes til Ex. Sidelinien $= a$, saa er Indholden $a^3$; og da $\sqrt[3]{a^3} = a$, saa findes Sidelinien til en Terning ved at udtrække Kubikroden af den givne Indhold.

Anm. Dette er Anledning til Navnet Kubiktal, der altid udtrykker Indholdet af en Terning, hvis Sidelinie er Tallets Kubikrod.

Till. 2. Bruges nu Decimal-Inddeling (§. 93), saa sees let af det Anførte, at en Kubikrode bliver 1000 Kubikfod, en Kubikfod 1000 Kubiktommer o. s. v. Derimod efter Duodecimal-Inddeling er en Kubikfod 1728 Kubiktommer, en Kubiktomme 1728 Kubiklinier.

Till.

Till. 3. Ved Kubikmaal har Decimal-Inddelingen samme Fordeel som ved Qvadratmaal (§. 97. Till. 3); det større Maal forvandles til det næstfølgende mindre, blot ved at tilføie tre Nuller, og det mindre til det næstforegaaende større ved at afskiære fra høire Side tre Cifre, eller ved at multiplicere og dividere med 1000. Saaledes er $75^{0}394^{I}638^{II}526^{III} = 75394638526^{III} = 75,394638526^{0}$. Bruges Duodecimal-Inddeling, maae man ved Forandring af større Maal til næste mindre multiplicere, og af mindre til næstforegaaende større dividere med 1728.

Till. 4. Sammenligning imellem Decimal- og Duodecimalmaal, samt det enes Forvandling til det andet, skeer ganske efter §. 94; kun at, naar Foden antages uforandret, man sætter 1000 Tommer for 10 og 1728 for 12, saa at 1000y = 1728z.

Till. 5. Til at reducere forskiellige Landes Kubikmaal tages Kubiktallene af de i Tabellen (§. 93) anførte Forholdstal, og Reductionen skeer efter Arithm. §. 77. 3.

§. 138.

Opgave. At beregne Indholdet af ethvert Prisme.

Opløsn.

Oploesn. Man beregner Grundfladens Indhold (§. 98, 99 og 100) og multiplicerer den med Prismets Høide.

Beviis 1) Er Prismet tresidigt, som *NO PRSQ* (Fig. XXXIV. d.), da er det Halvparten af Parallelepipedet *OT* (§. 131), som har samme Høide, men Grundfladen $OM = 2 \triangle NOP$. Parallelepipedets Indhold findes ved at multiplicere Grundfladen $2 \triangle NOP$ med Høiden *OQ*. Prismets altsaa, som er det Halve deraf, ved at multiplicere $\triangle NOP$ med samme Høide.

2) Er Prismet mangesidet, som *ABCDH* (Fig. XXXVII), kan det, ved at tænke sig Planerne *AH* og *BK* lagte igiennem Diagonalerne af dets Grundflader, inddeles i saamange tresidede Prismer som Grundfladen faaer Triangler; er altsaa tre. Ethvert af disse kan beregnes efter No. 1, og deres Summa er hele Prismets Indhold, der ogsaa findes med eet, naar hele Grundfladens Indhold i Qvadratmaal multipliceres med Høiden.

Till. 1. Ligedanne Prismer ere de, hvis Grundflader ere ligedanne plane Figurer, og hvis Sidelinier have samme Bøining mod Grundfladerne, og hvis Høider forholde sig som Grundfladernes eensliggende Sider; deres Indhold forholde sig derfor som Kubiktallene af deres Høider, eller to eensliggende Sider. Till.

Till. 2. Have to Prismer ulige Grundflader, som kunde være $a$, $\alpha$ og ulige Høider $b$, $\beta$, men dog ligestor Indhold, d. e. $ab = \alpha\beta$, saa er $a : \alpha$ $\beta : b$ ɔ: deres Grundflader og Høider ere reciproqve proportionale (Arithm. §. 71. Till. 2).

Till. 3. Sættes Indholdet af et vist Prisme $= A$, Grundfladen $= a$, Høiden $= b$, saa kan, naar af disse tre Stykker de to ere givne, det tredie findes, nemlig $A = ab$, $b = \frac{A}{a}$, $a = \frac{A}{b}$.

Exemp. En Mand indhøster 120 Traver Korn; hvert Neg optager tre Kubikfod Rum. Til at huse dette bygger han en Lade, som han giør 20 Fod bred, 12 Fod høi til Taget; fra Taget til Rykningen er Høiden det Halve af Bygningens Brede. Hvor lang behøves nu Laden at være?

§. 139.

Læres. Ethvert Snit igiennem en Cylinder $ABCD$ (Fig. XXXIX) med en plan $LN$, parallel med dens Grundflader frembringer en Cirkel $LMN$ ligestor med Grundfladen, hvis Centrum $K$ er i Cylinderens Axel $FG$.

Beviis. Enhver Sidelinie (Linie i Cylinderens Overflade), som $AC$, er parallel med Axlen $FG$

*FG* (§. 127); en Plan, lagt igiennem *ACGF*, vil skiære de parallele Planer af Snittet og Grundfladerne i de parallele Linier *AF* og *LK*, der blive ligestore (§. 30). En anden Plan, lagt igiennem *EH* og *FG*, vil ligeledes skiære Grundfladen og Snittet i de parallele og ligestore Linier *EF* og *MK*. Saaledes er $AF = LK$, $EF = MK$, men $AF = EF$, følgelig $LK = MK$. Punkterne *L* og *M* ligge saaledes i Omkredsen af en Cirkel, der har *K* til Middelpunkt.

Till. Cylindere ere i sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider: men ligedanne Cylindere (de, hvis Axel have samme Bøining mod Grundfladen) forholde sig som Kubiktallene af deres Høider eller Diameterne i deres Grundflader.

## §. 140.

Opgave. At beregne Indholdet af en Cylinder.

Opløsn. Grundfladens Indhold beregnes i Qvadratmaal (§. 105) og multipliceres med Cylinderens Høide.

Beviis. Da Cylinderen kan ansees som et uendelig mangesidet Prisme, saa indsees Opløsningens Rigtighed af det, der er sagt om Prismer §. 138.

Till. 1. Sætte vi Grundfladens Diameter i en Cylinder $= d$, dens Høide $a$, saa findes Cylinderens Indhold $= \frac{ad^2}{4}\pi = ad^2 \times \frac{1}{4}\pi =$ (da $\frac{1}{2}d = r$) $ar^2\pi$ (§. 105).

Till. 2. Tænke vi os en større udvendig Cylinder, hvis Grundflades Radius var $= R$, og en mindre indvendig, hvis Radius $= r$, og der spørges om Indholdet af Røret eller det der bliver tilbage naar den mindre Cylinder som et tomt Rum borttages fra den større, saa er, naar Høiden antages $= a$, det legemlige Indhold af Røret $= aR^2\pi - ar^2\pi = a(R^2 - r^2)\pi$.

Exemp. At udregne det legemlige Rum af et Blyrør som er 20 Fod langt, 8''' tyk i Metal, og hvis Aabning er en Fod i Diameter. Her er $R = 6''$ $8'''$ $r = 6^{II}$, $a = 200^{II}$; efter Formen findes Indholdet $= 200$ $(46{,}24\square^{II} - 36\square^{II}) \times 3{,}14159 = 6430{,}72$ Kubiktomme, omtrent 6,43 Kubikfod. Antages nu, efter hydrostatisk Forsøg, Blye elleve Gange tungere end Vand, en Kubikfod, efter dansk Maal og Vægt, altsaa at veie $11 \times 62$ Pund, saa kan, naar Prisen af et Pund Blye er bekiendt, Værdien af Røret herefter beregnes.

Till. 3. Sættes en Cylinders Indhold $\frac{ad^2}{4}\pi$

(Till.

(Till. 1) $= A$, saa er $4A = ad^2\pi$ og $\frac{4A}{d^2\pi} =$ $a$, og $d = \frac{4A}{a\pi}$. Man kan saaledes af en Cylinders Indhold og givne Diameter beregne dens Høide, og ligeledes af Indholdet og Høiden beregne dens Diameter.

Till. 4. Høiden af to Cylindere være $a$ og $\alpha$, deres Diameter $d$ og $\delta$, saa forholde Cylinderne sig som $ad^2 : \alpha\delta^2$; ere nu Høiderne lige ($a = \alpha$), forholde de sig som $d^2 : \delta^2$; men er $d = \delta$, er Forholdet som $a : \alpha$.

Antager man nu en Cylinder $k$, hvis Høide er $a$ og Diameter $d$, til Maalestok, saa at $ad^2 = 1$; og i en anden Cylinder $C$, Høiden $\alpha = na$ og Diameterne $\delta = md$, saa er Indholdet af den anden Cylinder $C = nm^2 \times K$, thi $K : C = ad^2 : \alpha\delta^2 = ad^2 : nam^2d^2 = 1 : nm^2$; er altsaa $K : C = 1 : nm^2$, saa er $C = nm^2 \times K$. Sættes til Exempel $\alpha = 3a$ eller $n = 3$, $\delta = \sqrt{13} \times d$ eller $m = \sqrt{13}$, og altsaa $m^2 = 13$, saa er $C = 3 \times 13K = 39K$ ɔ: Den til Maalestok antagne Cylinder $K$ indeholdes i $C$ saa ofte som Eenheden indeholdes i Produktet af $C$'s Høide og Qvadratet af dens Diameter.

§. 141.

§. 141.

**Forklar.** En Rudestok (virgula pithometrica seu cylindrica) er et Instrument til at udmaale Antallet af et vist Maal (Kander, Potter) af flydende Legemer i cylindriske Kar. Rudekunst (stereometria doliorum) er den Kunst, at kunde ved Hielp af det nævnte Instrument bestemme Antallet af Kander, Potter af et flydende Legeme i et Kar.

Anm. Rudekunst bruges ogsaa for Legemers Udmaaling i Almindelighed.

§. 142.

**Opgave.** At indrette og bruge en Rudestok.

**Opløsn.** Man lade sig forfærdige en mindre Cylinder, der holder nøiagtig en Kande eller Pot; en saadan være $ABCD$ (Fig. XLV). Dens Diameter $AB$ afsættes paa Catheterne af en retvinklet Triangel $KEF$, saa at $EF = EG = AB$; nu afsættes $EH = FG$, $EK = FH$ o. s. v., saa er $EG$, $EH$ og $EK$ o. s. v. Diameteren til en Cylinder, der med Høide $AC$ holder 1, 2, 3 o. s. v. Kander (§. 140. Till. 3, 4), da $EGq = FEq + EGq$, $FHq = FEq + EGq$ o. s. fr. Paa den ene Side af en Stok, der har Form af et langt og smalt Parallelepiped, afsættes disse Linier $EG$, $EH$,

*EH*, *EK* o. s. v., da ved *G* sættes Tallet 1, ved *H* 2, ved *K* 3 o. s. v., paa den anden Side Maalet *AC*. Man maaler nu Diameteren af den Cylinder, hvis Indhold man vil vide, med Rudestokken *EK*, og dens Høide med *AC*; Produktet af begge disse Tal angiver Mængden af Kander eller Potter (eftersom *K* antages at holde en Kande eller en Pot,) som Cylinderen indeholder, man vilde udmaale.

Anm. 1. De Kar, hvori flydende Legemer almindelig bevares, have sielden en fuldkommen cylindrisk Dannelse, men ere almindeligt mere ophøiede i Midten og smallere mod Enderne, saa at man maa giøre Forskiel paa Spundsdiameteren og Endediameteren, og kan antage omtrent Indholden af Karret (Tønde, Oxehoved, Pibe o. s. v.) at være liig Indholden af en Cylinder, hvis Diameter er en Middelstørrelse mellem Spunds- og Endediameteren, og hvis Længde den samme som Karrets. Begge disse Diametre maales derfor med den Side af Rudestokken, hvorpaa *EG*, *EH* o. s. v. ere affatte, og af de fundne Tal tages Middeltallet.

Anm. 2. Til Brug ved Told- og Handelsfaget have vi meget gode og nøiagtige, ved Toldkammerets Foranstaltning beregnede og udgivne, Tabeller, hvorved Indholden ved Rudestokken uden Beregning kan findes.

## §. 143.

Opgave. At beregne Overfladen af et Prisme.

Opløsn. Prismet være *BD* (Fig. XXIX), Sidefladerne ere Parallelogramer, deres Fladeindhold beregnes hver for sig efter §. 96, og sammenlagte udgiøre de Prismets Sideflade; hertil lægges Grundfladerne, der beregnes efter §. 100. Alt sammenlagt udgiør det hele Prismets Overflade.

Till. Er Prismet ret, da findes Qvadratindholdet af alle dets Sideflader ved at multiplicere Perimeteren af Grundfladen med Prismets Høide; thi Prismets Høide kan ansees som Grundlinie i Rectanglerne, der ere Sideflader, og Perimetrene af Grundfladerne som Summen af alle disse Rectanglers Høider.

§. 144.

Opgave. At beregne den krumme Overflade af en ret Cylinder.

Opløsn. Da Cylinderen er at ansee som et uendelig mangesidet Prisme (§. 227), er dens Overflade en uendelig Mængde Rectangler, der tilsammen udgiøre en eeneste Rectangel, hvis ene Side (Grundlinie) er Peripherien af Cylinderens Grundflade, og den anden Side (Høiden) er Cylinderens Axel; Overfladens Indhold findes altsaa ved at multiplicere Grundfladens Peripherie med Cylinderens Høide.

Till. Kalde vi som tilforn Cylinderens Diameter $d$ og Høiden $a$, saa er dens krumme Overflade $= ad\pi = 2ar\pi$ (§. 104), følgelig ligestor med Fladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional-Linie imellem Cylinderens Høide og Diameter; thi antag Radius i saadan Cirkel $= \varrho$, saa skal $\varrho^2\pi = 2ar\pi$, følgelig $\varrho^2 = 2ar$, og altsaa $a : \varrho = \varrho : 2r$ og $a : \varrho = \varrho : d$.

---

## IV. Om Pyramider og Kegler og deres Udmaaling.

### §. 145.

Lærel. Skiæres en Pyramide $abcr$ (Fig. XXXIII) forskiellige Steder med en Plan, der er lagt parallel med dens Grundflade, da blive de ved Snittene frembragte Flader $fgh$, $lmn$, plane Figurer, der ere ligedanne med Grundfladen.

Beviis. I Fladen $arb$ er Linien $fg \mp ab$, altsaa $ra : rf = ab : fg$, i Fladen $arc$ er $fh \mp ac$, altsaa $ra : rf = ac : fh$ (§. 60), følgelig $ab : fg = ac : fh$ eller $ab : ac = fg : fh$. Paa samme Maade vises, at $bc : ac = gh : fh$, og følgelig $\Delta\, fgh$ (Snittet) $\sim \Delta abc$ (Grundfladen) (§. 69). For

 ethvert

ethvert andet parallel Snit som *lmn* føres Beviset paa samme Maade.

Till. 1. Antages *rq* at være en lodret Linie paa Grundfladen *abc* og Vinklen $rqa = R$, da er den ogsaa lodret paa det parallele Snit *fgh* og Vinklen $rzf = R$ (§. 120 Till. 2); denne Linie *rq* er Pyramidens Høide, og *rz*, *rv* bestemme Snittenes Afstand fra Toppunktet, og vi have, naar vi betragte Fladen *arq*, hvor $fz \mp aq$, $rq : rz = ra : rf = ab : fg$.

Till. 2. $\Delta abc \backsim \Delta fgh$, altsaa er $abc : fgh = ab^2 : fg^2$ (§. 91), men $rq : rz = ab : fg$ (Till. 1), altsaa $rq^2 : rz^2 = ab^2 : fg^2$ (Algebra §. 58. Till. 2) og $\Delta abc : \Delta fgh = rq^2 : rz^2$. Paa samme Maade vises, at $\Delta fgh : \Delta lmn = rz^2 : rv^2$ ɔ: Flade-Indholden af Pyramidens Grundflade og de forskiellige dermed parallele Snitre forholde sig til hinanden som Qvadraterne af deres Afstand fra Pyramidens Top, eller ere i det dobbelte Forhold (ratione duplicata) af deres Afstand fra Toppunktet. (Algeb. §. 57. Till. 1).

§. 146.

Læresf. Giøres igiennem to Pyramider *ABCDR* og *abcr* (Fig. XXXII og XXXIII), hvis Grundflader ere ligestore ($ABDC = vbc$) og hvis Høider ere ligestore ($RE = rq$), parallele

lele Snitte i samme Afstand fra Toppunktet ($RZ = rz$), da ere Fladerne af disse Snitte ligestore ($FGHI = fgh$).

Beviis. $ABCD : FGIH = RE^2 : Rz^2$, og $abc : fgh = rq^2 : rz^2$ (§. 144. Till. 2); efter Betingelsen er $RE = rq$, $RZ = rz$, altsaa $RE^2 = rq^2$, $RZ^2 = rz^2$, og følgelig $abc : fgh = ABCD : FGIH$; nu er $abc = ABCD$ (efter Betingelsen), altsaa $fgh = FGIH$ (Arithm. §. 69, 70).

Till. Er saaledes alle i begge Pyramider i samme Afstand giorte Snit ligestore, saa er overalt deres Udstrækning i Længde og Brede ligestor; men da deres Høider ogsaa var antaget ligestor, saa er deres Udstrækning baade i Henseende til Længde, Brede og Hoide ligestor; men Legemer, der i Henseende til alle tre Dimensioner ere ligestore, opfylde ogsaa ligestore legemlige Rum ɔ: ere selv ligestore. Og vi have saaledes udledt den vigtige Sætning: Pyramider paa ligestore Grundflader med lige Høider ere ligestore ɔ: indeslutte et ligestort legemligt Rum.

Anm. Samme Slutning kunde ogsaa udledes saaledes: Man tænke sig igiennem begge de paa ligestore Grundflader staaende Pyramider giorte ligemange Snit i en uendelig liden Afstand fra hinanden; derved vilde begge Pyramiderne blive udskaarne i ligemange uendelig smaae Pyramidestykker. Var

nu

nu ethvert Par af disse ligestore, maatte Pyramiderne selv være ligestore; vi forudsatte, at deres Grundflader vare lige (§. 145), deres Hoider ligeledes, og da et saadant Pyramidestykke imellem to i en uendelig liden Afstand lagte Planer kan antages liigt et Prisme af samme Grundflade og Hoide; men Prismer paa samme Grundflade og med samme Hoide ere ligestore (§ 133) altsaa ere og Pyramidestykkerne ligestore; og da der af disse maatte i begge Pyramider, der antages at have samme Hoide, være ligemange, ere Pyramiderne selv ligestore.

## §. 147.

**Læresf.** Enhver tresidet Pyramide er en tredie Deel af et tresidet Prisme *ABCDEF* (Fig. XXXVI), der har samme Grundflade og Hoide som Pyramiden.

Beviis. Man trække i Sidefladerne *AFEC*, *CEDB* og *AFDB* Diagonalerne *FC*, *CD* og *DA*. Nu er $\Delta\ AFD = \Delta\ ABD$ (§. 30. Till. 3). altsaa Pyramiderne *ABDC* og *ADFC*, der have deres fælles Toppunkt i *C*, ligestore (§. 145); men Pyramiden *ACDF* er den samme som *ADFC*, altsaa Pyramid. $ABDC =$ Pyramid. *ACDF*.

Fremdeles er $\Delta\ AFC = FEC$, følgelig Pyramiderne *FECD* og *FACD*, der have deres fælles Toppunkt i *D*, ligestore (§. 145). Nu var Pyramiden $ACDF = ABDC$, altsaa og Pyramid. $FECD = ACDC$. Prismet indeholder

saa-

saaledes det samme Rum som tre Pyramider der ere ligestore og betragtede fra forskiellige Synspunkter have samme Grundflader og Høider som Prismet; enhver Pyramide er følgelig en tredie Deel af et Prisme der har samme Grundflade og Høide.

Anm. Ved virkelig at giennemskiære et tresidet Prisme, eller at sammensætte tre Pyramider af den ovenover forklarede Beskaffenhed til et Prisme, gióres denne Sætning mere indlysende.

Till. 1. Da et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) lader sig dele i saa mange tresidede Prismer som der ere Triangler i Grundfladen, saa er ogsaa en mangesidet Pyramide Tredieparten af et mangesidet Prisme.

Till. 2. Forskiellige Pyramider ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; ere altsaa Høiderne lige, forholde Pyramiderne sig som Grundfladerne, og ere Grundfladerne lige, som Høiderne.

§. 148.

Lære s. Ethvert Snit igiennem en Kegle *ADB* (Fig. XLI) med en Plan *FPK*, parallel med dens Grundflade *AB*, frembringer en Cirkel, hvis Centrum *N* ligger i Keglens Axel.

Beviis. Lad Fladen *DCB* skiære de parallele Planer af Snittet og Grundfladen i Linierne *NK* og *CB*, saa blive disse Snitte parallele, og altsaa $DN : DC = NK$

$= NK : CB$ (§. 60). Ligeledes skiæres Snittet og Grundfladen af Planen $DCL$ i Linierne $NP$ og $CL$, og vi have $DN : DC = NP : CL$; følgelig $NK : CB = NP : CL$; men $CB = CL$, altsaa og $NP = NK$. Fladen $FPK$ er saaledes en Cirkel, der har sit Centrum i $N$.

Till. 1. Grundfladen i Keglen $ADB$ forholder sig altsaa til Fladen af Snittet $FPK$ som $CB^2 : NK^2$ (§. 92. Till.) $= DC^2 : DN^2 = DI^2 : DG^2$ ɔ: Fladerne af de i en Kegle ved parallele Planer giorte forskiellige Snitte forholde sig som Qvadraterne af deres Afstand fra Toppunktet.

Till. 2. Da Keglen kan ansees for en uendelig mangesidet Pyramide, ligesom Cylinderen for et uendelig mangesidet Prisme, saa følger, at Keglen er Tredieparten af en Cylinder, der har samme Grundflade og Høide.

Till 3. Kegler ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; antages en af disse Størrelser i to Kegler ligestore forholde disse sig som den anden.

§. 149.

Opgave. At beregne Indholden af enhver Pyramide eller Kegle,

Opløsn. Man beregner Grundfladens Indhold og multiplicerer den med Tredieparten af Høiden.

Be-

Beviis. Prismets og Cylinderens Indhold er et Produkt af Grundflade og Høide (§. 138 og 140), Pyramiden og Keglen ere Trediepärten af et Prisme og Cylinder af samme Grundflade og Høide (§. 145), altsaa deres legemlige Indhold en Trediepart af Prismets eller Cylinderens Indhold; den findes følgelig ved at multiplicere Grundfladens Qvadrat-Indhold med en Tredie deel af Høiden.

Till. Er Grundfladen i en Pyramide eller Kegle $b$, dens Høide $a$, saa er $ab$ Indholden af et Prisme eller Cylinder, der er det tredobbelte af Pyramiden eller Keglen, og altsaa Pyramidens eller Keglens Indhold $= \frac{1}{3}ab = b \times \frac{1}{3}a$.

## §. 150.

Opgave. At beregne Indholdet af en ret afkortet Kegle $ADHG$ (Fig. XL).

Opløsn. 1. Af den største og mindste Diameter $AG$, $DH$ og Høiden $CE$ i det affortede Keglestykke, der antages at være givne, beregnes den Høide, Keglen vilde have om den var heel (her Linien $CK$) ved Hielp af denne Proportion $(AG - DH) : AG = CE : CK$ ɔ: Differencen imellem begge Diametre forholder sig til den største, som Høiden af den affortede til Høiden af den hele Kegle.

Beviis. I Fladen af Trianglen $AKC$ trækkes Linien $DB$ parallel med $KC$, saa er $AB : AC = BD$

$= BD : CK$ (§. 60), men $AB = AC - DE$ og $BD = CE$, altsaa $(AC - DE) : AC = CE : CK$ og $(2AC - 2DE) : 2AC = CE : CK$, deraf $(AG - DH) : AG = CE : CK$.

2) Af den fundne Høide $CK$ og Grundfladen beregnes nu Indholden af den hele Kegle $AKG$ (§. 147), dernæst Indholden af det borttagne Stykke, som er Keglen $DKH$ (hvis Høide $KE = KC - EC$); denne subtraheres fra den heles Indhold, og man har Indholdet af den affortede.

Till. 1. Sættes $AC = r$, $DE = \varrho$, $CE = a$, og $CK = x$, saa findes $x = \frac{ar}{r - \varrho}$ og $KE = x - a = \frac{ar}{r - \varrho} - a = \frac{ar - ar + a\varrho}{r - \varrho} = \frac{a\varrho}{r - \varrho}$, følgelig Indholdet af den affortede Kegle $= \frac{1}{3}\frac{ar}{r - \varrho} \times r^2\pi - \frac{1}{3}\frac{a\varrho}{r - \varrho} \times \varrho^2\pi = \frac{r^3 - \varrho^3}{r - \varrho} \times \frac{1}{3}a\pi$. Da fremdeles $\frac{r^3 - \varrho^3}{r - \varrho} = r^2 + r\varrho + \varrho^2 = (r + \varrho)^2 - r\varrho$, saa er den affortede Kegels Indhold $= ((r + \varrho)^2 - r\varrho)\frac{1}{3}a\pi$.

Anm. Mange Huusholdnings-Kar og Maal have Form af affortede Kegler og maae beregnes saaledes. Nogenlunde rette Træstammer beregnes ogsaa nøiagtigst,

tigst, naar de ansees for afkortede Kegler, da de blive smallere opad. Lad til Ex. den underste Diameter eller Giennemsnittet i en saadan Stamme forneden være 20″, foroven eller den mindste Diameter 16″, Længden 36′, saa findes Indholden efter den anførte Form $=(18^2-80)\times 120\times 3{,}14=91939{,}20$ Kubiktommer $=91{,}9392$ Kubikfødder.

Till. 2. En afkortet Pyramide kan ansees som en afkortet Kegle af samme Høide og ligesaa stor Grundflade. Man beregner derfor Grundfladens og Overfladens Indhold i Qvadratmaal, og søger Radius til Cirkler af samme Flade-Indhold $r$ og $\varrho$ (§. 105 Till. 3); da Indholden beregnes efter samme Form som er fundet for den afkortede Kegle.

§. 151.

Opgave. At beregne Overfladen af en Pyramide.

Opløsn. Sidefladerne, der alle ere Triangler, beregnes efter §. 98; Grundfladen, der altid er en retlinet Figur, beregnes ligeledes efter den plane Geometrie: disse sammenlagte give hele Pyramidens Overflade.

Till. 1. Er Pyramiden saaledes, at alle de lodrette Linier i enhver af dens Sideflader ere lige lange, da er Summen af alle Sidefladerne et Produkt af Grundfladens Perimeter og det Halve af en af disse lodrette Linier. I en afkortet Pyramide ere Sidefladerne Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Till.

Till. 2. Da en Kegle er en uendelig mangesidet Pyramide, dens Sideflade altsaa en Samling af uendelig mange smaae Triangler, hvis Høide er Keglens Sidelinie, saa er Keglens hele Sideflade ligestor med en Triangel, hvis Grundlinie er Peripherien af Grundfladen *ABG* (Fig. XL), og hvis Høide er Sidelinien *AK*; den beregnes altsaa efter §. 98 og 105. Grundfladen er en Cirkel, og beregnes efter §. 105. Disse sammenlagte give Keglens hele Overflade.

Till. 3. Sidefladerne af en afkortet Pyramide ere Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Till. 4. Kalde vi Sidelinien i Keglen $l$, Radius i Grundfladen $r$, saa er den krumme Sideflade $= 2r\pi \times \frac{1}{2}l = lr\pi$. Tænke vi os nu en Cirkelflade, hvis Radius er $\varrho$ og hvis Overflade $\varrho^2\pi = lr\pi$, saa er $\varrho^2 = lr$ og $l : \varrho = \varrho : r$. D. e. Keglens krumme Sideflade er ligestor med Fladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional-Linie imellem Keglens Sidelinie og Grundfladens Radius.

Till. 5. Sidefladen af en afkortet ret Kegle *ADHG* (Fig. XL) er et Produkt af *EC* og Peripherien af et igiennem Midten af *EC* parallel med Grundfladen giort Snit (§. 63 og 99).

---

V.

## V. Om Kuglen og dens Udmaaling.

§. 113.

**Læres.** Skiæres en Kugle med en Plan, bliver Giennemsnittet altid en Cirkel, hvis Centrum falder i en lodret Linie fældet fra Kuglens Centrum paa den skiærende Plan.

**Beviis.** Paa den skiærende Flade *IK* (Fig. XLIII) fældes en lodret Linie *CG* fra Kuglens Centrum, og fra *G* i den skiærende Flade forskiellige rette Linier *GE*, *CB*, *GD*. Da *CG* er lodret paa Planen *IK*, saa er Vinklen $CGD = CGB = CGK = R$; trækkes nu Linierne *CB* og *CD*, saa er $CD^2 = CG^2 + GD^2$ og $CB^2 = CG^2 + GB^2$ (§. 37), men $CD = CB$, da de ere Radier i Kuglen, følgelig $CD^2 = CB^2$ og *CG* er den samme, altsaa $CD^2 - CG^2 = CB^2 - CG^2$; ɔ: $GD^2 = GB^2$ og $GD = GB$. Paa samme Maade vises, at alle de rette Linier fra *G* til Kuglens krumme Overflade er ligelange, og altsaa at Fladen *IDKB* er en Cirkel og *G* dens Centrum.

**Till. 1.** Antages Snittet at gaae igiennem Kuglens Centrum, som *LCM*, da ere alle Linier i dets Flade, der trækkes fra *C* til Omkredsen, som *CL CM*, tillige Radier i Kuglen, og følgelig ligestore. Snitte igiennem Kuglens Middelpunkt

fremdbringe derfor Cirkler, hvis Radier ere Kuglens Radier; de ere derfor alle ligestore og faae Navn af Stor-Cirkler.

Till. 2. Ethvert Snit, som ikke gaaer igiennem Kuglens Centrum, fremdbringer en mindre Cirkel, der er desmindre jo længere den er borte fra Centrum; saaledes er Cirklen $IK$ (Fig. XLIII) mindre end $ON$, thi $CB^2 = CG^2 + GB^2$ og $CN^2 = CI^2 + IN^2$. Nu er $CB^2 = CN^2$ (da $CB$ og $CN$ er Radier i Kuglen), altsaa $CI^2 + IN^2 = CG^2 + GB^2$, men $CI^2 < CG^2$ efter Betingelsen, og følgelig $IN^2 > GB^2$ (Arithm. §. 38), og $IN > GB$, følgelig Snittet $OIN$ større end $IGK$.

Till. 3. Giøres flere Snitte i en Kugle parallele med hinanden, som $IK$, $ON$, $LM$ (Fig. XLIII), da falde deres Centra $G$, $I$, $C$, $F$ i samme rette Linie $AD$. Endepunkterne af denne Linie $A$ og $D$, der staae ligelangt borte fra Stor-Cirklen $LM$, kaldes Poler saavel til den som til de mindre Cirkler, og Linien $AD$ Axlen.

§. 153.

Læres. Lægges igiennem Polerne $A$ og $B$ til flere parallele Cirkler $KL$, $FG$, $HI$ (Fig. XLIV) to eller flere Cirkler $AMDB$, $AHEB$ og $ALGIB$,

saa

saa ere de Buer af Parallel-Cirklerne som ligge imellem to af disse ligedanne.

Beviis. Den rette Linie *AB* er Stor-Cirklernes Giennemsnits-Linie og Axlen for Parallel-Cirklerne; trækkes nu i Fladen *AEB* Linierne *IH* og *CE* og i Fladen *ADB* Linierne *IM* og *CD*, saa ere disse lodrette paa *AB*, og følgelig parallele. Af samme Grund er ogsaa i Fladen *AGB* Linierne *IL* og *CG* parallele, følgelig ere Vinklerne *LIH* og *GCE* ligestore og Buerne *HL* og *EG* ligedanne; ligeledes er Vinklerne *HIM* og *ECD* ligestore og Buerne *HM* og *ED* ligedanne.

Anderledes. Da *AB* er lodret paa alle disse Linier, saa er enhver af de nævnte Vinkler Bøinings-Vinkler for begge Planer, og altsaa ligestore.

Till. 1. Ere *AG* og *AE* Qvadranter, saa er *FODG* en Stor-Cirkel, der staaer lodret paa begge Qvadranterne og gaaer igiennem begges Poler, ligesom og begge Qvadranterne gaae igiennem dens Poler.

Till. 2. Begge Cirklernes, *AGB* og *AEB*, Bøining mod hinanden, eller den Vinkel de giøre med hinanden, bestemmes i Grader ved Buerne *HL* og *EG*.

§. 154.

§. 154.

**Lærers.** En Kugles Indhold (legemlige Rum) er to Trediedele af en Cylinder, der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter (en omskreven Cylinder.)

**Beviis.** Forestiller man sig en Qvadrant *ABC* (Fig. XLII) at dreie sig om *AB* saalænge til den falder i den Plan, hvorpaa den fra Begyndelsen stod lodret; en Qvadrat *DQ* at dreie sig paa samme Maade om *DE* = *AB*, og en retvinklet Triangel *FGT* om *FG* = *DE* = *AB*, saa vil Qvadranten danne en Fierdedeel af en Halvkugle, hvis Radius er *AB* = *DE* = *FG*; Qvadraten Fierdedelen af en Cylinder, der har til Radius i sin Grundflade og til Høide den samme Linie *AB* eller Kuglens Radius, og Trianglen Fierdelen af en Kegle der har samme Høide og Grundflade med samme Radius. Staa nu disse tre Legemer over samme Flade *AB* og man giennemskiærer dem med en Plan parallel med *AB*, saa ere alle Snittene *LIK*, *MNO*, *TVX* Qvadranter (§. 139, 152), og følgelig ligedanne Figurer (§, 92 Till. 2), hvis Flader forholde sig som Qvadraterne af deres Radier *LK*, *MO*, *VX*. Tænker man sig nu over samme Flade *AB* en Qvadrat *ac*, hvis Sidelinie *ab* antages

= *AB*

$= AB$ og i den en Qvadrant *alkc*, og, ved at trække Dialogen *bt*, den retvinklede Triangel *abt*. Saa vil, naar den med *AB* parallele Plan ogsaa gaaer her igiennem, *yk* være $= LK$, $yo = MO$, $yx = YX$. Men $bk^2 = yk^2 + yb^2$ (§. 37), og da $bk = bc = yo$, saa er $bk^2 = yo^2$. Fremdeles er $ba : at = by : yx$ (§. 60), men $ba = at$ (efter Betingelse), altsaa $by = yx$ og $by^2 = yx^2$. Indsættes disse Værdier for $bk^2$ og $by^2$ i den første Æqvation, saa faae vi $yo = yk^2 + yx^2$. Efter Construction er $yo = MO$, $yk = LK$ og $yx = YX$, altsaa er $MO^2 = LK^2 + YX^2$ og $MO^2 - YX^2 = LK^2$. Deraf end videre $\frac{1}{4}MO^2\pi - \frac{1}{4}YX^2\pi = \frac{1}{4}LK^2\pi$, det er Qvadranten *MNO* — Qvadr. *YVX* = Qvadr. *LIK*. Da dette kan paa samme Maade beviises hvor endog den skiærende Plan tænkes lagt i disse tre Legemer, saa følger, efter hvad der er sagt om Prismer (§. 133. Till. 1) og om Pyramider og Kegler (§. 146), at Fierdedelen af Cylinderen *DQ* — Fierdedelen af Keglen *FTG* er = Fierdedelen af Halvkuglen *ABC*. Kalde vi for Kortheds Skyld Fierdedelen af denne omskrevne Cylinder $\frac{1}{4}C$, af Halvkuglen $\frac{1}{4}K$ og af Keglen $\frac{1}{4}H$, saa have vi $\frac{1}{4}C - \frac{1}{4}H = \frac{1}{4}K$, og heraf $C - G = K$; ɔ: Cylinderen er, naar

Keglen er fradraget, ligesaa med den halve Kugle. Men Keglen er $\frac{1}{3}$ af en Cylinder der staaer over samme Grundflade og Høide, altsaa $H = \frac{1}{3}C$, men $C - H = K$, altsaa $C - \frac{1}{3}C = K$ og $K = \frac{2}{3}C$; ɔ: den halve Kugle er ligesaa i Indhold med to Trediedele af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Radius. Paa samme Maade kan Beviset føres for den anden halve Kugle og en ligedan Cylinder; følgelig er en heel Kugle $= \frac{2}{3}$ af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter.

Till. Kuglen er altsaa det dobbelte af en Kegle der har til Grundflade dens Stor-Cirkel og til Høide dens Diameter. Forholdet imellem en Kegle, en Kugle og en Cylinder af den anførte Beskaffenhed er altsaa som imellem Tallene 1, 2, 3.

§. 155.

Opgave. At beregne Indholdet eller Rummet af en Kugle, hvis Diameter er givet.

Opløsn. Man beregner Kuglens Stor-Cirkel (§. 105), denne multipliceres med Diameteren, og af dette Product tages de to Trediedele; (§. 140 og 145) eller Storcirklens Flade-Indhold multipliceres med to Trediedele af Diameteren.

Till.

Till. 1. Kalde vi Kuglens Diameter $d$, saa er Stor-Cirkelens Flade $= \frac{1}{4}d^2\pi$ (§. 105. Till. 1) og naar denne multipl. med $d$ er Cylinderens Indhold $= \frac{1}{4}d^3\pi$ men Kuglens Indhold bliver to Trediedele deraf altsaa $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}d^3\pi = \frac{2}{12}d^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$. Kuglens Indhold findes saaledes ved at multiplicere en sjette Deel af Diameterens Kubus med $\pi$ eller Diameterens Kubus med $\frac{1}{6}\pi$. Dette sidste Udtryk vilde i Praxis være det beqvemmeste, da $\frac{1}{6}\pi$ er et uforanderligt Tal, der eengang for alle kunde bestemmes, og er efter det Ludolphiske Forhold 0,52359.

Lad til Ex. en Kugles Diameter være $= 8''$, dens Indhold er da $\frac{1}{6} \times 8^3 \times \pi = 85\frac{1}{3} \times 3{,}14159 = 268{,}08235$ Kubiktommer. Eller $8^3 \times \frac{1}{6}\pi = 512 \times 0{,}52359 = 268{,}08238$ Kubiktommer.

Till. 2. Kalde vi Kuglens Indhold $A$ og som før dens Diameter $d$, saa have vi $A = \frac{1}{6}d^3\pi$; deraf $d^3 = \frac{6A}{\pi}$ og $d = \sqrt[3]{\frac{6A}{\pi}}$. Man kan efter denne Form, naar Kuglens Indhold er givet, finde dens Diameter.

Till. 3. Tænke vi os en Kugle $A$, hvis Diameter er $d$, saa er $A = \frac{1}{6}d^3\pi$, og en anden Kugle $B$, hvis Diameter er $\delta$, saa er dens Indhold


hold

hold $\frac{1}{6}\delta^3\pi$; følgelig $A : B = \frac{1}{6}d^3\pi : \frac{1}{6}\delta^3\pi$ og $A : B = d^3 : \delta^3$ (Arithm. §. 73. Anm.); d. e. forskiellige Kuglers Indhold forholde sig som Kuberne af deres forskiellige Diametre.

## §. 156.

Opgave. At beregne en Kugles krumme Overflade, naar dens Radius eller Diameter er given.

Opløsn. Af den givne Radius $CD$ (Fig. XLIII. Tab. VI) beregnes Overfladen af Kuglens Stór-Cirkel $= CD^2 \times \pi$; denne fire Gange taget udgior Kuglens Overflade $= 4 \times CD^2 \times \pi$.

Beviis. Antages den rette Winkel $BCD$ at dreie sig om den ubevægelige lodrette Linie $CB$, da vil Quadranten $BND$ beskrive den halve Kugles Overflade og enhver liden Bue af Quadranten $KL$ beskrive et Stykke af den krumme Flade; igiennem Middelpunktet af denne Bue $N$ og dens Endepunkter $K$ og $L$ trække man Linierne $NG$ $LH$ og $KF$ parallele med $DC$, da de ogsaa blive lodrette paa $CB$. Lægges nu igiennem $N$ en Tangent $LK$, som forlænget vilde skiære den ogsaa forlængede Linee $CB$ i $Q$, saa vil $LQ$ være Sidelinien, $QH$ Axelen, og $LH$ Grundfladens Radius i en lodret Kegle; og $KL$ vil ved Omdreining

ning beskrive et Stykke af denne Kegles Overflade, hvis Qvadrat-Indhold (§. 151. Till. 5) findes ved at multiplicere Peripherien af et Snit, giort igiennem Midten af $KL$ parallel med $LH$, med $KL$, og altsaa her $= 2NG \times \pi \times KL$. Tænke vi os nu Tangenten $KL$ overmaade liden, da er der ingen Forskiel imellem den og Buen $KL$, altsaa vil det lille Stykke af Kuglens Overflade, som Buen vil beskrive, ikke være mærkeligt forskiellig fra det Stykke af Keglefladen som Tangenten beskriver, og følgelig dette lille Stykke af Kuglefladen ogsaa være $= 2NG \times \pi \times KL$ eller $2\pi \times NG \times KL$.

Man trækker nu Linien $CN$, som er lodret paa Tangenten (§. 46) $LK$, og fælder fra $K$ paa $LH$ den lodrette Linie $KM$, som skiærer $NG$ i $V$ og er parallel og ligestor med $FH$. Efter det Anførte er Winklen $MNK = R$ og $NV$ lodret paa $KM$, altsaa $KL : KH = CN : NG$ (§. 68 og 71) og $NG \times KL = KM \times CN$ (Arithm. §. 71) $= CB \times FH$. Det lille Stykke Kuglefladе, som beskrives af Buen $KL$, var $= 2\pi \times NP \times KL$, men $NP \times KL = BC \times FH$, altsaa det nævnte Stykke af Kuglens Oerflade $= 2\pi \times BC \times FH$, hvor $CB$ er Kuglens Radius og $FH$ en overmaade liden Deel deraf. Forestil-

ler

ser man sig nu Radius CB deelt i lutter saadanne smaae Dele, hvortil høre ligesaamange smaae Buer, saa er ethvert Stykke af Kuglefladen et Produkt, hvis ene Faktor er Størrelsen $2\pi \times CB$ og den anden en saadan liden Deel af Radius som $FH$, følgelig den halve Kugleflade et Product af $2\pi \times CB$ og Summen af alle disse smaae Dele; men Summen af alle disse smaae Dele udgiør Radius $CB$, og saaledes er den halve Kugleflade $= 2\pi \times CB^2$ og den hele Kugleflade altsaa $= 4\pi \times CB^2$; men en Stor Cirkels Overflade $= \pi \times CB^2$, altsaa en Kugles Overflade ligestor med Fladerne af fire Stor Cirkler i samme Kugle.

Till. Tanke vi os en Qvadrat $DABC$, som dreier sig om $CB$, saa beskriver $AD$ Overfladen af en omskreven Cylinder (§. 154), hvis Overflade er, naar dens Høide er $CB$, $= 2\pi \times CB^2$ (§. 144), og sættes Høiden $= 2CB$, bliver Fladen $= 4\pi \times CB^2$, og følgelig ligestor med Kuglens Overflade.

§. 157.

Opgave. At beregne Kuglens Indhold, naar dens Overflade og Radius ere givne.

Opløsn.

Opløsn. Man multiplicerer den givne Overflade med en Trediedeel af Radius, saa har man Kuglens legemlige Indhold i Kubikmaal.

Beviis. Tænker man sig paa en Kugle en Stor Cirkel og en af dens Qvadranter ved at halveres deels i mange smaae Dele, og igiennem Stor-Cirklens Poler og disse Punkter andre Cirkler (hvoraf Stykkerne fra Polen til Stor-Cirklen, og saa vil blive Qvadranter) lagte, hvorpaa de samme Dele afsættes; imellem disse Punkter trækkes rette Linier eller Chorder, og derpaa rette Linier trukne fra Kuglens Center til ethvert af Delingspunkterne, saa opkomme Pyramider, hvis Toppunkt er i Kuglens Center og hvis Grundflader ere de imellem Korderne til de smaae Buer paa Stor-Cirklerne indsluttede Flader. Gientager man dette ved de øvrige Qvadranter i denne og den anden Halvkugle, saa er i Kuglen beskrevet et Polyheder, der er sammensat af lutter Pyramider, hvis Grundflader udgiøre Polyhedrets Overflade, og hvis Toppunkt er Kuglens Centrum. Fortsættes Halveringen af Buerne i det Uendelige, da falde Korder og Buer sammen, og Pyramidernes Grundflader blive Stykker af Kuglefladen og deres Høide Kuglens Radius. Den hele Kugle bestaaer altsaa af mange Pyramider, hvis Grundflader udgiøre

giøre Kuglens Overflade og hvis Høide er Kuglens Radius; men Indholdet af en Pyramide findes ved at multiplicere Grundfladen med en Trediedeel af Høiden (§. 149); altsaa Kuglens Indhold ved at multiplicere dens Overflade med en Trediedeel af dens Radius eller med en Siettedeel af dens Diameter. Kalde vi Indholden $A$, Overfladen $S$, og Diametren $d$, saa er $A = \frac{1}{6}dS$.

Till. 1. Vi fandt (§. 155) Kuglens Indhold $A$ af dens Diameter $d$ at være $= \frac{1}{6}d^3\pi$; sammenligne vi dette Udtryk for Kuglens Indhold med det i denne § oven fundne $\frac{1}{6}dS$ (hvor $S$ betyder den krumme Overflade), saa faae vi denne Ligning: $\frac{1}{6}dS = \frac{1}{6}d^3\pi$, og deraf $dS = d^3\pi$ og $S = d^2\pi$; ɔ: Kuglens krumme Overflade findes ved at multiplicere Diametens Qvadrat med $\pi$; men en Stor-Cirkels Overflade er $= \frac{1}{4}d^2\pi$ og $d^2\pi = 4 \times \frac{1}{4}d^2\pi$, altsaa enhver Kugles Overflade ligestor med fire Flader af Stor-Cirkler i samme.

Anm. Man kan saaledes finde Kuglens Indhold ved først at beregne Qvadratindholdet af dens Overflade, og omvendt finde Overfladen ved først at beregne Indholden. Jeg har fremsat begge Demonstrationer, skiøndt jeg ikke holder det for nødvendigt at forklare dem begge for Begyndere, men overlader det til Læreren at vælge, hvilken han troer den fatteligste.

Till. 2. Indholdet af ethvert Kuglestykke (Kuglesegment), som det der dannes ved Omdreining af Figuren *falv* (Fig. XLII), findes ved at beregne Indholdet af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide *av*, og derfra subtrahere Indholdet af den afkorte Kegle imellem *at* og *vs*. Ligeledes er det Stykke af Kuglefladen, der dannes af Buen *al*, saa stort som Overfladen af en Cylinder, hvis Høide er Kuglestykkets *av* og hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel. Herpaa grundes den almindelige Sætning: Tænker man sig en om en Kugle omskrevet Cylinder, og igiennem begge giøres flere Snitte parallele med Cylinderens Grundflade, da vil de imellem to saadanne parallele Snit liggende Dele af Kuglefladen (Belter v. Zoner) være ligestore med den krumme Overflade af det imellem samme Planer liggende Stykke af den omskrevne Cylinder. Ligeledes indsees let, at et Kugle-Udsnit (Kuglesector) er $\frac{2}{3}$ af en Cylinder, hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel og Høiden det til Udsnittet hørende Affnits-Høide.

Anm. Disse ere de Regler, efter hvilke Legemer, hvis Dannelse kan forklares af den elementare Geometrie, kan udmaales og beregnes. Egentlige regulaire (regelmæssige) Legemer ere saadanne, hvis

hvis Hiørner (solide Vinkler) ere ligestore (ↄ: dannes af ligemange ligestore plane Vinkler) og hvis Sideflader ere ligestore regulaire plane Figurer. Man indseer let, at de flade Vinkler, som danne et Hiørne, maae tilsammen udgiøre en mindre Sum end 360°, da de ellers vilde falde i een Plan og intet Hiørne danne. Af denne Forklaring sees, at kun fem regulaire Legemer ere muelige, nemlig:

1) Tetraeder (tetraedron), regulair firesidet Legeme, hvor Sidefladerne ere ligesidede Triangler og ethvert Hiørne dannes af tre Vinkler, der hver er 60°, deres Sum altsaa 180°.

2) Octaeder (octaedron), regulair Ottekant, hvis Sideflader ere ligesidede Triangler og hvis Hiørner dannes af fire Vinkler, hver 60°, deres Sum altsaa 240°.

3) Icosaeder (icosaedron), regulair Tyvekant, hvis Sideflader ogsaa ere ligesidede Triangler og fem Vinkler paa 60° danne ethvert Hiørne; deres Sum er altsaa 300°.

Af Triangler kan ingen flere regulaire Legemer dannes, da sex Vinkler, hver paa 60°, vilde udgiøre 360°, og altsaa ingen Hiørne danne.

4) Terningen (Cubus, Hexaeder) regulair Sexkant, hvor Sidefladerne ere Qvadrater og hver Hiørne dannes af tre rette Vinkler, hvis Sum er 270°,

5) Do-

5) Dodecaedret (dodecaedron), regulair Tolvkant, hvis Sideflader ere regulaire Femkanter, og enhver solid Vinkel dannes af tre Vinkler, hver paa 108°, deres Sum altsaa 324°.

Anm. 2. Meget irregulaire Legemers Indhold findes ved følgende Kunstgreb: Man lægger dem i et Kar af en saadan Dannelse, at dets Indhold nøiagtig kan beregnes, fylder Karret derpaa enten med Vand eller tør Sand. Tager man nu Legemet op, vil Vandet eller Sandet synke, og det Rum, det nu optager mindre end før og som let kan beregnes, er det irregulaire Legemes Indhold. I Hydrostatiken læres, hvorledes man af Legemernes specifiqve Vægt kan finde deres geometriske Indhold eller legemlige Rum.

§. 158.

Forklar. At kubere et geometrisk Legeme er at forvandle det til en Tærning (Kubus), eller at finde Sidelinien til en Kubus, der har samme legemlige Indhold som det givne Legeme. Findes denne Linie ved Construction, kaldes det geometrisk Kubatur; derimod er det arithmetisk, naar man finder denne Sidelinie ved Beregning. At forvandle en Figur til en anden, er ved Construction eller Regning af den givnes Dimensioner at bestem-

bestemme den søgte, hvor kun den ene eller anden Dimension er givet.

§. 159.

**Opgave.** At finde Siden til en Tærning, som indeholder en anden given Tærning et vist Antal ($n$) Gange.

**Opløsn.** Lad Siden i den givne Tærning være $a$, saa er Indholden $a^3$, den søgtes Indhold altsaa $na^3$ og dens Sidelinie $l = \sqrt[3]{na^3} = a\sqrt[3]{n}$. Er nu $n = 2$, saa er Siden til den dobbelt saa store Tærning $l = a\sqrt[3]{2}$; er $n = 3$, saa er $l = a\sqrt[3]{3}$ o. s. v.

**Till. 1.** Da forskiellige Kugler forholde sig som Kuberne af deres Diametre (§. 155. Till. 3), saa er agsaa, naar en Kugles Diameter er $= d$, Diameteren af en $n$Gange saa stor Kugle $D = d\sqrt[3]{n}$. Dette anvendes i Artilleriet til at forfærdige Caliberstokke.

**Till. 2.** Man seer let af denne ene Opgave, hvorledes ethvert Legeme ved Regning kan kuberes. Er f. Ex. Diameteren i en Kugle $d$, saa er dens Indhold $\frac{d^3\pi}{6}$ (§. 155) og Side-

lien

linien i en ligesaa stor Tærning $= \sqrt[3]{\frac{d^3\pi}{6}} = d\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.

§. 160.

Opgave. At forvandle en Kegle, hvis Dimensioner ere bekiendte, til en Cylinder, hvis Hoide er bestemt.

Oplosn. Lad Hoiden af Keglen være $a$, dens Grundflades Diameter $\delta$; og Cylinderens givne Hoide $a$, dens Grundflades søgte Diameter $x$. Keglens Indhold er da $= \frac{1}{4}d^2\pi \times \frac{1}{3}a = \frac{1}{12}\delta^2 a\pi$ (§. 149), den søgte Cylinders Indhold $= \frac{1}{4}x^2 a\pi$ (§. 140); da Indholden af begge skal være lige, saa er $\frac{1}{4}x^2 a\pi = \frac{1}{12}\delta^2 a\pi$. Af denne Æqvation søges Værdien for $x$, og vi faae $x^2 a = \frac{1}{3}\delta^2 a$ og $x^2 = \frac{\delta^2 a}{3a}$, følgelig $x$, den søgte Diameter i Cylinderens Grundflade) $= \delta\sqrt{\frac{3a}{a}}$ (Algebra §. 39).

Till. 1. Paa samme Maade kan en given Cylinder forvandles til en Kugle af lige Indhold. Kalde vi Cylinderens Hoide $a$, dens Diameter $d$, og Kuglens søgte Diameter $x$, saa er Cylinderens

Ind-

Indhold $\frac{1}{4}d^2a\pi$ (§. 140) og Kuglens Indhold $= \frac{1}{6}x^3\pi$ (§. 154), altsaa $\frac{1}{6}x^3\pi = \frac{1}{4}d^2a\pi$, $x^3\pi = \frac{3}{2}d^2a\pi$, $x^3 = \frac{2}{3}d^2a$, og $x = \sqrt[3]{\frac{3d^2a}{2}}$

Till. 2. Efter samme Fremgangsmaade kan enhver af disse Figurer forvandles til et Prisme eller Pyramide, og omvendt.



Plan

# Plan Trigonometrie.

# Indledning.

§. 1.

Geometrien har lært os, hvorledes man af tre givne eller bekiendte Stykker i en Triangel, hvoraf det eene dog maae være een Side, kan ved Tegning, efter en formindsket Maalestok, frembringe den hele Triangel, da de øvrige Stykker bestemme sig selv; Vinklerne blive nemlig ligesaastore som de ere i den virkelige Triangel, og Linierne blive efter den antagne formindskede Maalestok hvad de ere i det større Maal. Men ere i en saadan Triangel en Linie eller Vinkel overmaade liden i Sammenligning med de øvrige, da er denne Tegning i høi Grad underkastet Feil. Til Ex. forestille man sig en Triangel, hvis ene Side er Jordkuglens Radius, og de to andre Sider Linier, der, trukne fra denne Radius's Endepunkter, skulde løbe sammen i Solens Centrum. Endog med den allermindste Maalestok og med den allerstørste Nøiagtighed vilde det være umueligt at tegne den saaledes,

at man kunde, endog kun med nogenlunde Vished, bestemme Skiæringspunktet af de næsten parallel med hinanden løbende Linier. Dette var rimeligt den første Anledning for Mathematikerne, da de vilde vove dem til at udmaale hele Verdensbygning, at opfinde en Videnskab, hvorved man, naar de tre Ting, der bestemme en Triangel, nøiagtigen vare udmaalte, blev i Stand til ved sikker Regning med en tilstrækkelig Nøiagtighed at kunde finde de øvrige Stykker endog uden Tegning. Denne Videnskab kaldte man Trigonometrie (Prolegom. §. 4).

Anm. Ligesom Geometrie vel egentlig først er bleven til for Landmaalings Skyld, men siden har viist en langt mere udbredt Nytte, saaledes have Opmaalinger paa Himlen først givet Anledning til Trigonometrie, som dog nu ikke blot i Astronomie, men i alle Dele af den anvendte Mathematik viser den største Nytte og meest udbredte Anvendelse.

§. 2.

I Geometrien have vi udmaalt Vinklerne ved at sammenligne dem med en ret Vinkel, der antoges som Maalestok; og da der var samme Forhold imellem de fra forskiellige Vinkelspidser med samme Radius beskrevne Cirkelbuer som imellem Vinklerne, saa udtryktes ogsaa Vinklernes Størrelse i Buer, og man sammenlignede Buerne i

Ste-

Stedet for Vinklerne. Saa rigtig som dette er for at kunde angive alle muelige Vinklers Forhold til hinanden og deres Forhold til en ret Vinkel, saa lidet tiener det til at kunde i alle Tilfælde udtrykke Forholdet imellem Sider og Vinkler i en Triangel, og derved finde en fast Regel, hvorved de i Trigonometrien søgte ubekiendte Ting kunde findes. Ved et Exempel vil jeg oplyse det. I den ligesidede Triangel $BFC$ (Fig. XLVII) vilde det være rigtigt, at Siderne forholde sig som de modstaaende Vinkler; thi $BF : BC = 1 : 1$

og Vinklen $C : F = 60° : 60° = 1 : 1$

(Geometr. §. 29. Till.), altsaa $BF : BC = C : F$ (Arithm. §. 69 og 70). Fælde vi derimod fra $C$ en lodret Linie $CA$ paa $BF$, da bliver Vinklen $FCA = ACB = \frac{1}{2}C$ og $FA = AB = \frac{1}{2}FB$ (Geomet. §. 13). I $\Delta\, AFC$ er altsaa $FC : FA = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$, men Vinklerne $FAC : FCA = 90° : 30° = 3 : 1$, og følgelig vilde Proportionen $FC : FA = FAC : FCA$ være urigtig, og det vilde her ikke finde Sted, at Siderne forholde sig som de modstaaende Vinkler; man har derfor søgt at udtrykke Vinklernes Størrelse og Forhold til hinanden ved rette Linier, som man gav Navn af trigonometriske Linier.

---

# I. Om de trigonometriske Linier.

## §. 3.

Forklar. Beskrives fra Toppunktet $C$ af en Vinkel $ACB$ (Fig. XLIV) med en vilkaarlig Radius en Cirkel, da vil et Stykke af Cirkelperipherien $AB$ ligge imellem Vinklens Sider; fældes nu fra et af denne Bues Endepunkter (det Punkt, hvor den ene af Vinklens Sider skiærer den) $B$ eller $A$ en lodret Linie $BD$ paa den modstaaende Vinkel-Side $AC$, da kaldes Linien $BD$ Sinus for Buen $AB$ og for Vinklen $ACB$. Det Stykke Linie $AD$, Sinus afskiærer af Radius, kaldes den forkerte Sinus (sinus versus).

Till. 1. Forlænges Sinus $BD$ indtil den skiærer Cirklen i $I$, saa er $DI = DB$, fordi $BC = CI$, $CD = CD$, og ved $D$ rette Vinkler (Geomet. §. 32), følgelig $BD = \frac{1}{2}BI$; men $BI$ er en Korde der underspender Buen $BAI$ det dobbelte af Buen $BA$: Altsaa er Sinus til enhver Bue det halve af en Korde til en dobbelt saa stor Bue. For Ex. var Buen $GAE$ (Fig. XLVII) $= 60°$, altsaa $GE = CG = r$ (Geomet. §. 49. Till. 2) saa var $GD =$ Sin. $30° = \frac{1}{2}r$.

Anm.

Anm. Af denne Egenskab ved Sinus, at den er $\frac{1}{2}$ Chorde, har nogle villet udlede Aarsagen, hvorfor denne Linie betegnes med Ordet *sinus*; det skulde nemlig fra Begyndelsen været semis inscriptæ ($\frac{1}{2}$ Chorde), som blev skrevet s. ins., og endelig forkortet til sin., hvoraf ved en latinsk Endelse var blevet sinus. Mig forekommer denne Derivation søgt, og jeg finder det meget rimeligt, at det er det latinske Ord sinus som er valgt, da den rete Linie, det bruges til at udtrykke, vel ikke selv er en Bugt eller Bøining, men tiener dog til at udtrykke Størrelsen af en Bugt eller Bøining.

Till. 2. Sinus til Buen *BFK* eller Vinklen *BCK* (Fig. XLIV), der er større end 90°, er ogsaa Linien *BD*; thi efter Definitionen skal den være en lodret Linie fra *B* eller *K* paa den modstaaende Side (som her maa forlænges), men fra *B* gives ingen anden lodret Linie paa *CK* end *BD*. Buerne *BFK* og *BA* udgiøre 180° og kaldes hin andens Complementer. Vilde man derimod fælde den fra *K*, vilde den falde paa den forlængede *BC*, og den samme Linie vilde da blive Sinus baade for Buen *BFK* og *Ki*, der ogsaa samlede udgiøre 180°. Altsaa have to Buer, der samlede udgiøre 180°, een og samme Sinus.

Till. 2. Lader man Punktet *B* nærme sig efterhaanden fra *A* til *F* og tænker sig Chorder igiennem disse forskiellige Punkter lodrette paa *AC*,

da

da vil Chorderne voxe fra o, da *B* var i *A*, indtil *B* falder i *F*, da Chorden bliver = Diameteren *FL*; derfra tage de igien af og blive igien o naar Punktet *B* falder i *K* saaledes, at Chorderne i lige Afstand fra Diameteren *FK* paa begge Sider, som f. Ex. *BI* og *bi*, blive ligestore (Geomet. §. 42). Hvad der er sagt om de hele Chorder, gielder ogsaa om de halve; Sinuserne voxe altsaa, naar deres Buer voxe fra *A* til *F* ɔ: fra 0° til 90°. I *F* var Chorden ligestor med Diameteren, Sinus altsaa for Buen *AF* eller 90° ligestor med Radius. Bliver Buen større end 90°, da blive Chorderne mindre jo mere Punktet *b* nærmer sig *K* eller jo mere Buen nærmer sig til 180°. Sinuser til Buer fra *F* til *K* ɔ: fra 90° til 180°, tage altsaa af, naar Buerne tage til, indtil endelig Sinus for 180° er = o.

Till. 4. Skiærer *CB* forlænget Cirklens Omkreds i *i*, saa er *di* Sinus til Buen *AFKi*, men *di* = *BD* = *bd*; en Bue over 180° har altsaa en Sinus, der er ligesaa stor som Sinus til den Bue, der udgiør hvad den første er større end 180°. Saaledes have her Buen *AFKi* samme Sinus som *Ki* = *AB*. Det samme gielder for Buen *AFKI*, der er over 270°, der har til Sinus *DI* = *bd* = *BD* = Sin. Buen *BFK*, der er ligestor med Buen *KiI*, dens Overskud over 180°.

Till.

Till. 5. Sinus til alle Buer fra 0° til 360° er saaledes mindre end Radius, undtagen Sinus for 90° og for 270°. De voxe i den første Qvadrant fra 0 til de blive = *r*, tage af i den anden fra *r* til 0, voxe i den tredie fra 0 til *r*, og tage af i den fierde fra *r* til 0. Man kan derfor ansee alle Sinuser som Brøk eller Dele af Radius, som derfor kaldes *sinus totus* (den hele Sinus), da Sinus for 90° og for 270° ogsaa er ligestor med Radius (Till. 3 og 4), bruges ogsaa Udtrykket *sinus totus* for Sinus 90° og Sinus til 270°.

Till. 6. Da alle Sinuser for Buer imellem 180° og 360° falde paa den modsatte Side af Diameteren *AK*, saa kan de i Sammenligning med dem paa den anden Side ansees som nægtende (Arithm. §. 39). Det samme sees af Maaden, hvorpaa de fremkomme (Till. 4). Radius eller *sinus totus* være *r*, $AB = 60° = Ki = IA$, altsaa $ABFKi = 180° + 60° = 240°$ og $AFKiI = 360 - 60° = 300$, saa er Sin. $60° = + BD$, men Sin. $240°$ = Sin. $300° = - di$ (men $di = BD$). Det Modsatte i de to Sinuser *BD* og *di* ligger i deres Direction; der ere modsat, hvad enten man paa enhver gaaer fra det Punkt, hvor de skiære *AK* til det hvor de støde mod Buen eller fra dette til hiint;

men

men ved *di* og *DI* ere Directionerne ikke modsatte, de have derfor eens Tegn.

Sinuserne ere altsaa bekræftende i første og anden Qvadrant, og nægtende i tredie og fierde.

Till. 7. Sinus vers. voxer for Buer fra 0° til 180°, fra 0 til den bliver ligestor med Diameteren, og tager igien af for Buer fra 180° til 360°, fra at være ligestor med Diameteren til den bliver 0; den er altid bekræftende.

§. 4.

Forkl. Trækkes til et af Buens Endepunkter *A* eller *B* en Tangent (Geom. § 46 Till. 1), som *GA*, og den anden Vinkelside eller den Radius som skiærer Buen i *B* forlænges til den overskiærer Tangenten i *G*, da er *AG* Tangent og *CG* Sekant til den bestemte Bue *AB* og til Vinklen *ACB*.

Till. 1. Tangenten til Buen *AFb* er *Ag* = — *AG* efter de antagne Størrelser af disse Buer (§. 3. Till. 1), Tangenten til Buen *AFKi* bliver igien Linien *AG* selv, og Tangenten til Buen *AFKiI* er *Ag* eller —*AG*. Tangenterne er saaledes i første og tredie Qvadrant bekræftende, men i anden og fierde benægtende.

Till. 2. Dreier Linien *CB* sig fra *A* mod *F*, saa bliver Giennemsnitspunktet for Tangenten og

Secan-

Secanten $G$ stedse længere borte fra $A$, indtil det endelig, naar $CB$ falder sammen med $CF$ og bliver parallel med $AG$ (Geom. §. 25), bliver uendelig, langt borte og ikke kan angives. Dreier $CB$ sig videre, indtil $b$ f. Ex., saa er det ikke muligt at den kan skiære $AG$ uden saavel den som Tangenten forlænges paa den modsatte Side af Diameteren, da Skiæringspunktet bliver $g$; kommer den derefter til $K$, vil den, forlænget til den modsatte Side, falde sammen med $AC$. Dreier $CB$ sig endnu videre indtil $i$, bliver Giennemsnitspunktet igien $G$. Kommer $CB$ til $L$, bliver den igien parallel med $AG$; kommer den videre til $I$, saa er Skiæringspunktet igien $G$, og endelig falder den igien sammen med $CA$.

Tangenterne voxe altsaa i den første Qvadrant og Tangenten til $90^\circ$ er $= \infty$; i den anden Qvadrant tage de negative Tangenter af som Buerne voxe, og Tang. $180^\circ = 0$; i den tredie Qvadrant voxe igien de bekræftende Tangenter, og Tang. $270^\circ = \infty$; i den fierde aftage atter de nægtende, og Tang. $360^\circ = 0$.

Till. 3. Secanterne voxe i den første Qvadrant fra $r$ til $\infty$, og ere bekræftende; i den anden tage de af fra $\infty$ til $r$, og ere nægtende; i den tredie voxe de fra $r$ til $\infty$ og ere ~~bekræftende~~; i den fierde tage de af fra $\infty$ til $r$, og ere ~~nægtende~~.

Anm.

Anm. De hidtil forklarede trigonometriske Linier Sinus, Sinus versus, Tangens og Secans kunde ansees som de trigonometriske Hovedlinier, de følgende derimod som Bilinier.

§. 5.

Forkl. Opreises fra $C$ en Linie $CF$ lodret paa $AC$, da kaldes Vinklen $BCF$ Opfyldnings-vinkel (Complement) baade til den spidse Vinkel $ACB$ og til den stumpe $BCK$. Buen $BF$ faaer ogsaa Navn af Complement saavel til Buen $AB$ som til Buen $BFK$. Sinus til denne Bue $BF$, som er $BE = DC$, kaldes Cosinus (Complementets Sinus) til Buen $AB$ og til Vinklen $ACB$.

Till. 1. Cosinus til Buen $AFb$ er Linien $bE = Cd = - CD$ ɔ: Cosinus til en Bue imellem 90 og 180° er ligestor med Cosinus til en Bue, der er ligesaameget under 90° som denne er over, men negativ. Saaledes er her Cosinus for Buen $AC = CD$ og for Buen $ABb = - CD$.

Till. 2. I den første Qvadrant tager Cosinus af naar Buerne voxe indtil den, naar Buen er 90°, bliver = 0 eller forsvinder; den er bekræftende. I den anden Qvadrant tager den igien til, indtil Buen er 180°, da Cosinus er = $r$, den er benægtende. I den tredie Qvadrant tager den af som i første, men er benægtende; i fierde Qvadrant voxer den som i anden, og er bekræftende.

§. 6.

§. 6.

Forkl. Complement-Buens eller Vinklens Tangent $HF$ kaldes Cotangent til Buen $AB$ eller Vinklen $ACB$, og Linien $CH$ Cosecant.

Till. 1. Da Vinklen $AGC = GCF$ (Geom. §. 28) og ved $F$ og $A$ rette Vinkler, saa er $\Delta\, GAC \sim \Delta\, HFC$ (Geom. §. 68) og $AG : AC = CF : FH$ eller Tangenten af enhver Vinkel, som vi vil kalde $x$, forholder sig til Radius som Radius til Cotangenten af samme Vinkel ɔ: Tang. $x : r = r$ : Cotang. $x$ og Cotang. $x = \frac{r^2}{\text{Tang. } x}$. For en anden Vinkel $y$ vil Cotangens ligeledes være $= \frac{r^2}{\text{Tang. } y}$; følgelig Cotang. $x$ : Cotang. $y$ = Tang. $y$ : Tang. $x$. Cotangenterne have derfor i de forskiellige Qvadranter samme Tegn som Tangenterne.

Till. 2. Da $\Delta\, CBD \sim \Delta\, CFH$ (Geom. §. 68), saa er $BD : BC = CF : CH$ eller Sin $x : r = r$ : Cosecans $x$, altsaa Cosecans $x = \frac{r^2}{\text{Sin. } x}$, og har derfor samme Tegn som Sinus $x$.

Anm. Benævnes en Bue eller en Vinkel udtrykt i Grader med et Bogstav $a$, $x$, $y$ ꝛc., da skrives for Kortheds Skyld sin. $x$ (Sinus for Vinklen eller

Buen

Buen af $x$ Grader), cos. $x$ (Cosinus), tang. $x$ (Tangenten til Buen eller Vinklen $x$), cot. $x$ (Cotangenten), cosec. $x$ (Cosecanten), og sin. vers. $x$ og cos. v. $x$ (Sinus versus og Cosinus versus). Saa ofte Udtrykket sin. $x^2$, cos. $x^2$ eller lignende forekomme, da hører Exponenten ikke til Buen $x$, men til den rette Linie; det skulde derfor egentlig skrives (sin. $x)^2$, (cos. $x)^2$ o. s. v.

§. 7.

Opgave. At bestemme de øvrige trigonometriske Linier for enhver given Vinkel $x$, naar Radius antages $= r$, og Sin. $x$ er bekiendt.

Opløsn. 1) Den givne Vinkel $x$ være $ACB$ (Fig. XLIV), $CB = r$, og $BD =$ sin. $x$; vi have da i den retvinklede $\Delta\, BDC$, $DC^2 = BC^2 - BD^2$ (Geom. §. 37), men $DC = BE =$ cos. $x$ (§. 5), altsaa cos. $x^2 = r^2 -$ sin. $x^2$; deraf cos. $x = \sqrt{r^2 - \text{sin. } x^2}$.

2) sin. vers. $x$ var Linien $AD$ (§. 4), men $CA - CD = AD$, altsaa sin. vers. $x = r -$ cos. $x$.

3) I den retvinklede $\Delta\, AGC$ er $BD \neq AG$ og (Geomet. §. 60) $CD : DB = CA : AG$ ɔ: cos. $x$ : sin. $x = r$ : tang. $x$ og tang. $x = \frac{r \times \text{sin. } x}{\text{cos. } x}$. I samme Triangel er $CD : CA =$

$CB : CG$

$CB : CG$ ɔ: cos. $x : r = r$ : sec. $x$ og sec. $x$
$= \frac{r^2}{\text{cos. } x}$.

4) I Δ $CHF$ er $BE$ ≠ $HF$, og altsaa $CE : EB = CF : FH$ ɔ: sin. $x$ : cos. $x =$
$r$ ; cot. $x$ og cot. $x = \frac{r \times \text{cos. } x}{\text{sin. } x}$. Videre
er i samme Triangel $CE : CF = CB : CH$
ɔ: sin, $x : r = r$ ; cosec. $x$ og cosec. $x =$
$\frac{r^2}{\text{sin. } x}$.

5) cosin. vers. $x = FE = CF - CE$
$= r -$ sin. $x$.

Till. 1. Disse Former vise, at naar Sinus for en Vinkel er givet, lade sig deraf alle de øvrige til samme Vinkel henhørende trigonometriske Linier bestemme. Og skiøndt de svel egentlig kun passe for Buer og Vinkler under 90°, saa kan de, naar blot Tegnene efter de foregaaende §§. forandres, ogsaa anvendes for Buer over 90°. Saaledes er sin. vers. $x = r -$ cos. $x$; men er det for en Bue over 90°, da er sin. vers. $x =$
$r - (-$ cos. $x) = r +$ cos. $x$, thi Cosinus for Buer imellem 90° og 180° ere nægtende (§. 5. Till. 2).

Till.

Till. 2. Ogsaa følger heraf (sammenlignet med §. 3, 4, 5, 6), at to Buer, der samlede udgiøre 180°, have ligestore trigonometriske Linier, naar den eene nemlig sin. vers. undtages.

Till. 3. Anvendelsen af de udfundne Former sees tydeligere af et Exempel. Lad Winklen $x$ være $= 30°$, dens Sinus er da $= \frac{1}{2}r$ (§. 3. Till. 3); og sætte vi $r = 1$ (som den almindelig antages naar man vil beregne trigonometriske Linier), saa have vi efter den udfundne Form cos. $x = \sqrt{r^2 - \text{sin. } x^2}$ her cos. $30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732\ldots}{2} = 0{,}866\ldots$. sin. vers. $x = r -$ cos. $x$, altsaa sin. vers. $30° = 1 - 0{,}866\ldots = 0{,}134\ldots$ tang. $x = \frac{r \times \text{sin. } x}{\text{cos. } x}$, følgelig tang. $30° = \frac{0{,}5}{0{,}866} = 0{,}587\ldots$ o. s. v.

Till. 4. Sættes $x = R$, da er cos. $x = \sqrt{r^2 - r^2} = 0$ (§. 5.) og tang. $x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x} = \frac{1}{0} = \infty$ (§. 5), Secans $x = \frac{r^2}{\text{cos. } x} = \frac{1}{0} = \infty$.

§. 8.

**Læres.** De forskiellige eensnævnede trigonometriske Linier til ligedanne Buer, og altsaa til ligestore Vinkler, forholde sig som de forskiellige Radier, hvorved Buerne ere beskrevne.

**Beviis.** Fra Toppunktet $C$ i Vinklen $ACB$ (Fig. XLV) beskrives med Radierne $CA$ og $Ca$ de ligedanne Buer $AB$ og $ab$. Man trækker deres Sinuser $BD$ og $bd$, Tangenterne $AG$ og $aI$, Cosinuserne blive da $CD$ og $Cd$, Secanterne $CG$ og $CI$, Sin. vers. $AD$ og $ad$. Fuldføres Buen $AB$ til $F$ og $ab$ til $f$, bliver $HF$ og $hf$ Cotangenter, men $CH$ og $Ch$ Cosecanter for Buerne $AB$ og $ab$.

I Trianglen $AGC$ ere Linierne $GA$, $IA$, $BD$ og $bd$ parallele, og vi have altsaa følgende Proportioner (Geom. §. 55 og 60):

$CB : Cb = BD : bd$, ɔ: Radierne som Sinuserne
$CA : Ca = AG : aI$, ɔ: Rad. som Tangenterne
$CB : Cb = CD : Cd$, ɔ: Rad. som Cosinuserne
$CA : Ca = CG : Cg$, ɔ: Rad. som Secanterne
$CF : Cf = FH : fh$, ɔ: Rad. som Cotangenterne
$Cf : Cf = CH : Ch$, ɔ: Rad. som Cosecanterne
$CA : Ca = CD : Cd$, og deraf (Arithm. §. 73, 3)

$CA$ :

$CA : Ca = (CA - CD) : (Ca - Cd)$, og
$CA : Ca = AD : ad$, ɔ: Radierne som de forskiellige sin. vers.

Anm. At dette egentlig for spidse Vinkler eller Buer under 90° førte Beviis ogsaa gielder for stumpe Vinkler eller Buer over 90°, sees let af §. 7. Till. 3.

Till. Har man, som §. 8 er viist, beregnet de trigonometriske Linier for en vis Vinkel eller Bue $x$ under den Betingelse, at Radius = 1 og man betegner disse sin. $x$, tang. $x$ ꝛc.; antages da en anden Radius = $r$ og de trigonometriske Linier for den givne Vinkel, svarende til denne Radius, betegnes med de store Bogstaver Sin. $x$, Tang. $x$ o. s. v.: saa forholde $1 : r$ = sin. $x$ : Sin. $x$, og Sin. $x = r \times$ sin. $x$; ligeledes $1 : r$ = tang. $x$ : Tang. $x$, og Tang. $x = r \times$ tang. $x$. Man kan saaledes bruge de til Radius 1 beregnede trigonometriske Linier ogsaa for enhver anden Radius, naar de alle multipliceres med denne. Til Ex.: sin. 30° = 0,5 (§. 7 Till. 3); sættes nu $r$ = 10000, saa er Sin. 30° = 0,5 × 10000 = 5000, cos. 30° = 0,866, altsaa Cos. 30° = 0,866 × 10000 = 8660 o. s. v.

Anm. Det er viist, at alle trigonometriske Linier ere afhængige af Sinus og den antagne Radius,

og

og at de alle, naar Sinus er given, lade sig efter de fundne Formeler beregne. Det staaaer tilbage at vise, hvorledes Sinus for enhver Bue findes, naar Radius antages for Eenheden (sættes = 1). Da Sinus for enhver Vinkel eller Bue er det Halve af Chorden til en dobbelt saa stor Vinkel eller Bue (§. 3 Till. 1), saa findes Sinuserne ved at søge Chorderne til de dobbelte Buer; disse Chorder, der kan ansees som Sider i regulaire Polygoner, findes for en Deel efter den plane Geometrie (§. 102). Dog er det for at indsee Muligheden af fuldstændige ɔ: saadanne, hvori findes de trigonometriske Linier for hver Bue i den første Qvadrant fra Minut til Minut i det mindste trigonometriske Tabellers Beregning nødvendigt at giøre sig bekiendt med følgende didhenhørende Sætninger.

§. 9.

Læres. I enhver Triangel *ABD* (Fig. XLVI) forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne af de modstaaende Vinkler ɔ: *AD*: *BD* = Sin. *ABD* : Sin. *DAB*.

Beviis. Om Trianglen beskrives en Cirkel (Geom. §. 41) og fra Centrum *C* trækkes Linierne *CA*, *CD* og *CE*, saa er *AD* Chorde for Vinklen *ACD*, og altsaa $\frac{1}{2}AD$ = Sin. $\frac{1}{2}ACD$, men Vinklen *ACD* = 2*ABD* og $\frac{1}{2}ACD$ = *ABD*, altsaa $\frac{1}{2}AD$ = Sin. *ABD*. Paa samme Maade sees, at $\frac{1}{2}BD$ = Sin. *DAB*. Altsaa er $\frac{1}{2}AD$ : $\frac{1}{2}BD$

$\frac{1}{2}BD$ = Sin. $ABD$ : Sin. $DAB$, men $\frac{1}{2}AD$ : $\frac{1}{2}BD = AD : BD$, følgelig $AD : DB$ = Sin. $ABD$ : Sin. $DAB$.

§. 10.

Opgave. Naar i en ligebenet Triangel $ACB$ (Fig. XLVIII) af de tre Ting, Grundlinien $AB$, et af de ligelange Been $AC$, og Sinus for den halve Vinkel ved Toppen (Sin. $\frac{1}{2}ACB$), de to ere givne, at finde det tredie.

Opløsn. Fra Toppunktet fældes $CD$ lodret paa $AB$, saa er $AD = \frac{1}{2}AB$ og Vinkl. $ACD = \frac{1}{2}ACB$ (Geomet. §. 13), og $AC : AD$ = Sin. $ADC$ : Sin. $ACD$ ($\frac{1}{2}ACB$), men Sin. $ADC = r = 1$ (§. 3. Till. 3), altsaa $AC : \frac{1}{2}AB = 1$ : Sin. $\frac{1}{2}ACB$. Følgelig er 1) Sin. $\frac{1}{2}ACB = \frac{\frac{1}{2}AB}{AC} = \frac{AB}{2AC}$. 2) $AB = 2AC \times$ Sin. $\frac{1}{2}ABC$. 3) $AC = \frac{AB}{2 \times \text{Sin.} \frac{1}{2}ACB}$.

Till. 1. Udtrykke vi Linierne med almindelige Tegn og sætte $AC = a$, $AB = b$, Vinklen $ACB = x$, saa have vi 1) Sin. $\frac{1}{2}x = \frac{b}{2a}$ 2) $b = 2a \times$ Sin. $\frac{1}{2}x$. 3) $a = \frac{b}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x}$

Till.

Till. 2. Sættes Radius i Stedet for Eenheden at være $r$, saa findes 1) $\text{Sin.}\ \frac{1}{2}x = \frac{rb}{2a}$. 2) $b = \frac{2a \times \text{Sin.}\ \frac{1}{2}x}{r}$. 3) $a = \frac{rb}{2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}x}$.

Till. 3. Trækkes $AF$ lodret paa $CB$, saa er $\text{Sin.}\ B = \text{Cos.}\ \frac{1}{2}x$ (§. 5. Till. 2), altsaa $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}x : \text{Sin.}\ x = a : b$, og $b = \frac{a\ \text{Sin.}\ x}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}x}$.

Anm. Disse Former tiene til, af Siderne at finde Vinklerne, som og af Vinklerne og een Side at finde de andre.

§. 11.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for en Vinkel ere givne, da at finde Sinus til en dobbelt saa stor Vinkel; og, naar Cosinus til en Vinkel er givet, at finde Sinus og Cosinus for en halv saa stor Vinkel.

Opløsn. 1) Den givne Vinkel være $ACD$ (Fig. XLVIII). Sættes nu som i forrige §. $AC = a$ og $AB = b$, og Vinklen $ACB = x$, saa er $ACD = \frac{1}{2}x$; men nu var $b = 2a \times \text{sin.}\ \frac{1}{2}x$ (§. 10), ligeledes var $b = \frac{a \times \text{sin.}\ x}{\text{cos.}\ \frac{1}{2}x}$

(§. 10. Till.), altsaa $2a \times$ sin. $\frac{1}{2}x = \frac{a \times \text{sin.}x}{\text{cos} \frac{1}{2}x}$

altsaa 2 sin. $\frac{1}{2}x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } \frac{1}{2}x}$, følgelig sin. $x =$ 2 sin. $\frac{1}{2}x \times$ cos. $\frac{1}{2}x = 2$ (sin. $\frac{1}{2}x \times$ cos. $\frac{1}{2}x$). Antage vi nu $\frac{1}{2}x = a$, saa er $x = 2a$ og sin. $2a = 2$ (sin. $a \times$ cos. $a$) ɔ: Sinus for det dobbelte af en Vinkel findes ved at tage det dobbelte Produkt af den enkelte Vinkels Sinus og Cosinus.

2) Antage vi i den nævnte Figur (XLVIII) $\angle ACB = x$, hvis Cosinus er bekiendt, og fælde Linien $AF$ lodret paa $CB$, saa er $\triangle AFB \sim \triangle CDB$ (Geom. §. 68) og $FB : AB = BD : CB$, men $BD : CB =$ sin. $\frac{1}{2}x : r$ (og naar $r = 1$) $=$ sin $\frac{1}{2}x : 1$. Fremdeles, da $FB = CB - CF$ og $AB = 2BD$, er $CB - CF : 2BD =$ sin. $\frac{1}{2}x : 1$; men $CB - CF = 1 -$ cos. $x$, og $BD =$ sin. $\frac{1}{2}x$, altsaa $1 -$ cos. $x : 2$ sin. $\frac{1}{2}x =$ sin. $\frac{1}{2}x : 1$, følgelig 2 (sin. $\frac{1}{2}x)^2 = 1 -$ cos. $x$ og sin. $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \text{cos. } x}{2}$, og sin. $\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } x}{2}}$. Af denne Værdie findes (§. 7) cos. $\frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \text{sin. } \frac{1}{2}x^2}$, følgelig, naar den fundne Værdie for sin. $\frac{1}{2}x$ indsættes,

sættes, faae vi $\cos. \frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \cos. x}{2}\right)}$ $= \sqrt{\frac{2 - 1 + \cos. x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}$. Vi have saaledes fundet 1) $\sin. \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$ og 2) $\cos. \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}$; ɔ: af den givne Sinus og Cosinus for den hele Vinkel $x$ bestemt Sinus og Cosinus for den halve Vinkel $\frac{1}{2}x$.

§. 12.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler $ACB = a$ og $BCD = b$ (Fig. XLIX) ere givne, da at finde Sinus og Cosinus for deres Summa som er $\angle ACD = a + b$.

Opløsn. De givne Sinuser og Cosinuser gioeres beskuelige ved Tegning, og man har $BE = \sin. a$, $CE = \cos. a$, $DG = \sin. b$, $CG = \cos. b$; paa samme Maade ere de søgte synlige, nemlig $DF = \sin. (a + b)$ og $FC \cos. (a + b)$. Linien $GK$ fældes lodret paa $AC$ (Radius, der antages $= 1$) og $GK$ lodret paa $FD$. Den søgte Sinus for $a + b$ er $DF = FH + HD$, der findes saaledes: I $\Delta\ CBE$ er $GK \mp BE$, altsaa (Geom. §. 60) $CB : BE = CG : GK$; d. e. $1 : \sin. a$ $= \cos.$

$= \cos. b : GK$, men $GK = HF$ og $= HF$ saaledes sin.$a \times \cos.b$. Videre er $\Delta DGH \backsim \Delta GHL$ (Geom. §. 71) $\backsim \Delta LFC \backsim \Delta CBE$, og saaledes $\Delta DGH \backsim \Delta CBE$, altsaa $CB : CE = DG : DH$ ɔ: 1 : cos. $a$ = sin. $b : DH$ og $DH = \cos. a \times \sin. b$; følgelig $HF + HD = \sin. a \times \cos. b + \cos. a \times \sin. b$, men $FH + HD = FD = \sin. (a + b)$, altsaa $\sin. (a + b) = \sin. a \times \cos. b + \cos. a \times \sin. b$. Den søgte cos. $(a + b)$ er $= CF = CK - KF$, der findes saaledes: I $\Delta CBE$ er $CB : CG = CE : CK$ ɔ: $1 : \cos. b = \cos. a : CK$ og $CK = \cos. a \times \cos. b$. Videre er som før $\Delta DGH \backsim \Delta CBE$, altsaa $CB : BE = DG : GH$ ɔ: $1 : \sin. a = \sin. b : GH$ og $GH = \sin. a \times \sin. b$, men $GH = KF$, saaledes $KF = \sin. a \times \sin. b$. Nu var cos. $(a + b) = CK - KF$, altsaa $\cos. (a + b) = \cos. a \times \cos. b - \sin. a \times \sin. b$.

Till. Sættes $a = b$, saa er sin. $a + b = \sin. 2a = \sin. a \times \cos. a + \cos. a \times \sin. a = 2 (\sin. a \times \cos. a)$, som er det samme der fandtes §. 11.

§. 13.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler $ACB$ og $DCB$ (Fig. L) ere givne

da

da at finde Sinus og Cosinus for deres Difference ɔ: Vinklen $ACD$.

Opløsn. Antag Vinklen $ACB = a$ og $DCB = b$, saa er Vinklen $DCA = a - b$. Med Radius $BC = 1$ beskrives Buen $ADB$, saa er $BE = \sin. a$, $EC = \cos. a$, $DG = \sin. b$, $CG = \cos. b$, $DF = \sin. (a - b)$ og $CF = \cos. (a - b)$. Man trækker $GH \mp BE$, forlænger $FD$ og $CB$ til de skiære hinanden i $L$, og trækker $GK \mp AC$. Nu forholde i $\Delta CBE$; $CB : BE = CG : GH$ ɔ: $1 : \sin. a = \cos. b : GH$ og $GH = KF = \sin. a \times \cos. b$; fremdeles er $\Delta DKG \sim KGL$ (Geom. §. 71) $\sim LFC \sim CBE$, altsaa $BC : CE = GD : KD$ ɔ: $1 : \cos. a = \sin. b : KD$ og $KD = \cos. a \times \sin. b$; men $FK - KD = FD = \sin. (a - b)$, altsaa $\sin. (a - b) = \sin. a \times \cos. b - \cos. a \times \sin. b$. Ligesaa er $\cos. (a - b) = FC = CH + HF$. Værdien af denne findes ved at betragte de samme Trianglers Ligedanhed, nemlig: i $\Delta CBE$ er $CB : CG = CE : CH$ ɔ: $1 : \cos. b = \cos. a : CH$ og $CH = \cos. a \times \cos. b$. $\Delta DKG \sim \Delta CBE$ og $CB : BE = DG : GK$ ɔ: $1 : \sin. a = \sin. b : GK$ og $GK = \sin. a \times \sin. b$, men $GK = FH$ saaledes $FH = \sin. a \times \sin b$, og vi havde $CH = \cos. a \times \cos. b$, følgelig $FH + CH = FC = \cos. (a - b) = \cos. a \times \cos. b + \sin a \times \sin. b$.

Till.

Till. Sætte vi $a = b$ og $a - b = o$, saa er sin. $(a - b)$ = sin. $a \times$ cos. $a$ — cos. $a \times$ sin. $a = o$, og cos. $(a - b)$ = cos. $o$ = cos. $a^2$ + sin. $a^2 = 1$.

Anm. 1. Ved Hielp af den i Geometrien (§. 102) forklarede Methode, af en Polygon-Side og en given Radius at finde Siden til en anden Polygon af et dobbelt Antal Sider, kan man, ved at begynde med en regulair Sex- eller Firkant, finde Chorden til en Centervinkel af een Second, og deraf ved Hielp af de her forklarede Sætninger finde Sinus for enhver Bue, hvoraf efter de (§. 7) fundne Former de øvrige trigonometriske Linier lade sig bestemme, og, saamange som behøves, bringe i Tabeller; hvilke almindeligt kaldes trigonometriske Tavler eller Sinus-Tavler. Dog bruges til at forkorte disse overmaade vidtløftige Beregninger mangfoldige Konstgreb, som her ikke kan forklares.

Anm. 2. Til de i saadanne Tavler beregnede Tal for enhver trigonometrisk Linie kan man søge Logarithmerne i de almindelige Logarithme-Tavler (Algeb. §. 81). Men, for at spare den dobbelte Umage, har man indrettet Tavler, hvor man strax finder de til enhver i Tal beregnet trigonometrisk Linie svarende Logarithmer. Saadanne Tabellee kaldes konstige trigonometriske Tabeller i Modsætning af de (Anm. 1) omtalte, der kaldes naturlige.

Anm. 3. Ved Trigonometriens Anvendelse eller Opløsning af trigonometriske Opgaver kan man alt-

saa

saa udføre Beregningerne paa to Maader: enten efter naturlige eller konstige Tabeller; Brugen af kostige Tabeller er i de fleste Tilfælde det fordelagtigste. Men dog er det aldeles nødvendigt at lære at kiende Indretningen og Brugen af begge Slags Tabeller.

---

## II. Om Indretningen og Brugen af trigonometriske Tabeller.

### §. 14.

I de sædvanlige Tabeller findes allene Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens, da disse ere de Linier der oftest bruges, og de øvrige desuden ved Hielp af de anførte Former let lade sig bestemme. Ligeledes sees af det hidtil forklarede, at Tabellerne kun behøve at indeholde de trigonometriske Linier for den første Qvadrant, da de for de øvrige have samme Størrelse og kun forandret Beliggenhed. For at have Complementet til enhver Vinkel lige over for den, saa at med eet kan sees baade dens Sinus og Cosinus, Tangens og Cotangens, ere Tabellerne saaledes indrettede, at Graderne fra 0 til 45 ere betegnede øverst paa Siden og deres fortløbende Minuter i den første Pil'e paa venstre Side fra oven og ned, derimod Graderne

fra

fra 45 til 90 for neden og deres Minuter i den yderste Pille paa høire Side fra neden og opad; saa at naar for oven paa en Side findes f. Ex. 37°, og altsaa i den tiende Linie fra oven Sinus og Tangens for 37° 10', da findes forneden 52°, og i samme Linie, hvor de 10' stod paa venstre, findes paa høire 50'. Man har derved den Fordeel, at den Colonne Tal, der angiver Sinus og Tangens for den ene Vinkel, angiver tillige Cosinus og Cotangens for den anden som er dens Complement, og omvendt.

§. 15.

I de almindelige Tabeller antages ikke som her $r = 1$, da alle Sinuser saaledes vilde blive Brøk, men sædvanlig antages den = 10000,000000 og af de derefter beregnede Linier (hvorledes de for Radius = 1 beregnede Linier kunde forandres efter enhver Radius, er viist (§. 8. Till.)) har man i de smaae Udgaver af Tabeller udeladt de tre sidste Zifre, og altsaa egentlig kun antaget Radius = 10,000000.

Logarithmerne for de trigonometriske Linier i alle Tabeller have Hensyn til en Radius af 10000000000. Derfor er Log. $r = 10$ (Algeb. §. 77); denne er følgelig for stor, naar man kun som i de almindelige Tavler sætter $r = 10000000$.

Dette

Dette foraarsager imidlertid ingen Feil i de trigonometriske Beregninger, da man ved de i Tal udtrykte Linier, hvortil Logarithmerne svare, ikke see paa deres virkelige Størrelse, men kun paa deres Forhold til hinanden. For Resten kan man let forandre Logarithmerne, saa at de svare til Linier beregnede for $r = 1$, naar man blot subtraherer 10 fra deres Caracteristik; saaledes Log. sin. 90° (naar Radius er ti tusinde Millioner) = 10,0000000 (i de mindre Tabeller anføres kun i Logarithmerne syv Decimaler), men Log. sin. 90° naar Radius er 1) = 0,00.

§. 16.

De mindre trigonometriske Tabeller indeholde blot Grader og Minuter; de større derimod tillige Secunder, eller i det mindste Differencen for en Secund, og forskaffe derfor saavel større Beqvemmelighed som Nøiagtighed.

I Vegas Haandbog (Algeb. §. 77. Anm. 2) indeholder den anden Tabel Logarithmerne for de trigonometriske Linier; jeg vil, som i Algebra ved Logarithmernes Forklaring, benytte mig af den og citere den. De naturlige Linier (Sinus, Tangens ꝛc.), som her for Rummets Skyld ere udeladte, kunde og heraf ved Hielp af den første Tabel findes. I Vegas større Tabeller findes disse.

Brugen af disse Tabeller læres upaatvivlelig lettest ved mundtlig Anviisning og umiddelbar Øvelse. Jeg vil derfor blot med Hensyn til den ommeldte Vegas Haandbog ved et Par Exempler søge at oplyse Maaden, hvorpaa man gaaer frem.

§. 17.

Opgave. At finde Logarithmerne for de trigonometriske Linier der høre til en given Bue eller Vinkel, der er udtrykt allene i Grader og Minuter.

Opløsn. I) Ere de givne Grader under 45, da søger man Graderne øverst paa Siden i Tabellen og Minuterne i første Pille paa venstre Haand fra oven og ned ad; ved Siden af Minuterne findes da (fra Venstre mod Høire) Logarithmer for Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens til den givne Bue eller Vinkel. F. Ex.:

1) Den givne Bue være 6° 35'; man finder da S. 239 ved 6° 35'

Log. sin. = 9,0593672. Log. cos. = 9,9971268

Log. tang. = 9,0622403. Log. cot. = 10,9377597.

2) Buen være 1° 23', og man finder S. 203 ved 1° 23'

Log. sin. = 8,3827620. Log. cos. = 9,9998734

Log. tang. = 8,3828886. Log. cot. = 11,6171114

II)

II) Ere de givne Grader over 45, saa søger man Gradetallet nederst paa Siden og Minuterne i den yderste Pille mod Høire fra neden opad, og man finder ved Siden af Minuterne fra Høire mod Venstre Logarithmerne for den givne Bues Tangent, Cotangent, Sinus og Cosinus. F. Ex.

1) Den givne Bue være 83° 25′, og man finder S. 239 ved 83° 25′

Log. tang. = 10,9377597 . Log. cot. = 9,0622403
Log. sin. = 9,9971268 . Log. cos. = 9,0593672

2) Buen være 88° 37′; man finder da Side 203 ved 88° 37′

Log. tang. = 11,6171114 . Log. cot. = 8,3828886
Log. sin. = 9,9998734 . Log. cos. = 8,3827620.

§. 18.

Opgave. At finde Logarithmerne for de trigonometriske Linier til en i Grader, Minuter og Sekunder udtrykt Bue.

Her gives efter de omtalte Tabellers Indretning tvende Tilfælde:

A) Naar den givne Bue er over 5, men dog under 85 Grader.

Opløsn. For Grader og Minuter søges som i forrige Opgave Logarithmerne i Tabellen fra S. 239 til Enden; det i den Pille, som for oven er beteg-

betegnet $D\ 1''$ (det e. Differencen for en Sekund) ved Siden af den fundne Logarithme staaende Tal multipliceres med Antallet af de givne Sekunder, og det Udkomne lægges til den fundne Logarithme eller tages derfra eftersom den ved Buernes Forstørrelse voxer eller aftager. Den med $CD\ 1''$ (communis differentia) betegnede Pille imellem Log. tang. og Log. cot. hører til begge, efterdi

$$\text{cot. } x = \frac{r^2}{\text{tang. } x} \text{ (§. 7) og } r^2 = \text{tang. } x \times$$

cot. $x$, følgelig 2Log. $r$ = Log. tang. $x$ + Log. cot. $x$ (Algebra §. 75), altsaa 2Log. $r$ = Log. tang. $x + d$ + Log. cot. $x - d$.

Lad til Exempel den givne Bue være 6° 35′ 3″; man finder da S. 239 ud for 6° 35′

1) Log. sin. = 9,0593672 og $D1''$ = 182,25 × 3″
hertil lægges for = 546,75
de 3 Sekunder + 547 da Brøken $\frac{75}{100}$ ansees
som en heel og 9,0594219 = Log. sin. 6° 35′ 3″

2) Log. cos. = 9,9971268 og $D\ 1''$ = 2,43 × 3
− 7 = 7,29
9,9971261 = Log. cos. 6° 35′ 3″

3) Log. tang. = 9,0622403 og $CD1''$ = 184,68 × 3
+ 554 = 554,04
9,0622957 = Log. tang. 6° 35′ 3″

4) Log.

4) Log. cot. = 10,9376597
− 554
10,9377043 = Log. cot. 6° 35′ 3″

B) Naar den givne Bue er under 5 eller over 85 Grader.

Opløsn. Man finder disse Grader fra S. 193 til S. 238 saaledes, at Logarithmen for hver Minut og hver tiende Sekund med Differencen for een Sekund ere anførte, og man gaaer her frem paa samme Maade som i første Tilfælde.

Den givne Bue være f. Ex. 1° 24′ 53″, og man finder S. 203

Log. sin. 1° 24′ 50″ = 8,3022486 og $D\,1'' = 852,2 \times 3$
2556,6

og Log. sin. 1° 24′ 53″ = 8,3922486 + 2557
= 8,3925043.

Till. 1. De fra S. 193 til 202 i den første Pille værende Tal udtrykke Summen af de enkelte Sekunder; saaledes er 1° 12′ 50″ = 4370, som findes S. 202 i den første Pille ved 1° 12′ 50″. Hvorledes disse Summer tiene til endnu nøiere at finde Logarithmerne end ved sidste Opløsning, vil tydelig sees af følgende Exempler:

1) Lad den givne Bue være 1° 8′ 56″; man finder da S. 201 1° 8′ 50″ = 4130″, den givne Bue

Bue altsaa = 4136″. Nu findes i den første Tabel for de almindelige Tal-Logarithmer

Log. 4136 = 3,6165805
Log. 4130 = 3,6159501
Log. Differ. = 6304,

som maae adderes til Logarithmen for Sinus og Tangens, men subtraheres fra Logarithmen for Cotangens; og saaledes bliver

a) Log. sin. 1° 8′ 50 = 8,3014959
+ 6304
Log. sin. 1° 8′ 56″ = 8,3021263

b) Log. tang. 1° 8′ 50″ = 8,3015830
+ 6304
Log. tang. 1° 8′ 56″ = 8,3022134

c) Log. cot. 1 8′ 50 = 11,4984170
− 6304
Log. cot. 1° 8′ 56″ = 11,3977866

Till. 2. For de fem sidste Grader gielde vel ikke umiddelbar de i første Pille ved venstre Side anførte Sekund-Summer, men dog deres Logarithme-Differencer, som stedse blive de samme for to Buer, der ere hinandens Complementer. For Ex. Buen 88° 51′ 4″ være givet.

Ved den næst foregaaende mindre Bue 88° 51′ finder man S. 201 i den første Pille ved ven-

stre

fte Side Sekund-Summen 4140; den givne Bue er 4'' høiere end 88° 51, dens Complement altsaa 4 Sekunder mindre, eller 4136. Man søger nu Tal-Logarithme-Tabellerne.

Log. 4140 = 3,6170003
Log. 4136 = 3,6165805
Log. Differ. = 4198, som adderes til Log. tang. 88° 51', men subtraheres fra Log cot. og Log. cos. af samme Bue. Saaledes bliver

a) Log. tang. 88° 51' 0'' = 11,6973665
+ 4198
Log. tang. 88° 51' 4'' = 11,6977863

b) Log. cot. 88° 51' 0'' = 8,3026335
— 4198
Log. cot. 88° 51' 4'' = 8,3022137

c) Log. cos. 88° 51' 0'' = 8,3025460
— 4198
Log. cos. 88° 51' 4'' = 8,3021262

## §. 19.

**Opgave.** At finde Buen eller Vinklen, der svarer til en given Logarithme for en trigonometrisk Linie.

**Opløsn.** Her møde to Tilfælde: enten findes den givne Logarithme nøiagtig i Tabellerne, eller ikke. Er det første Tilfældet, da søges den

ligefrem i Tabellerne, og de tilhørende Grader findes, for oven eller neden efter Colonnens Overskrift, og Minuterne enten i den første eller sidste Pille, saaledes som tilforn er forklaret.

F. Ex. 1) Log. tang. $x = 8,6784573$; denne findes Side 213 i første Pille paa venstre Haand lige for $43' 50''$ og over staaer Siden $2^\circ$, altsaa er $x = 2^\circ 43' 50''$. Var derimod den givne Logarithme $8,6784573 =$ Log. cot. $x$, saa findes Graderne neden for paa samme Side og Minuterne og Sekunderne i sidste Pille mod Høire og $x = 87^\circ 16' 10''$.

2) Log. sin. $x = 9,066919$ findes nøiagtig Side 239 ud for $42'$, altsaa er $x = 6^\circ 42'$; men var samme Logarithme $9,0669619 =$ Log. cos. $x$, saa var $x = 83^\circ 18'$.

Finder derimod det andet Tilfælde Sted, at den givne Logarithme ikke nøiagtig findes i Tabellerne, da maa man gaae frem paa følgende Maade:

Man søger, som i første Tilfælde, den mindre Logarithme, der nærmer sig meest den givne, tager Differencen mellem den og den givne, og dividerer denne Differents med det Tal, som findes lige ved i den med $D$ 1'' betegnede Pille; den derved udkomne Qvotient viser, hvormange Secunder der maae lægges til eller tages fra (eftersom Buen voxer eller

tager.

taget af) den Bue, der hører til den fundne Logarithme, for at den skal svare til den givne.

E. Ex. Lad være givet Log. tang. $x = 8,6785738$ man finder S. 213 den næst mindre.

Log. tang. $2^\circ\ 43'\ 50'' = 8,6784573$

Difference 1165

I Pillen $D''$ findes 442,3, hvormed 1165 divideres, Qvotienten $2,6''$ adderes til $2^\circ\ 43'\ 50''$, og den Bue $x$, som hører til den givne Log. tang., er $= 2^\circ\ 43'\ 52,6''$.

Till. Findes den næste mindre Logarithme fra Side 193 til 202, saa kan man i Stedet for den anførte Opløsning benytte sig af Sekundsummen i første Pille paa følgende Maade:

E. Ex. Lad være givet Log. sin. $x = 7,9337679$, saa findes S. 196 Log. sin. $0^\circ\ 29'\ 30'' = 7,9335428 =$ Log. sin. $1770''$ og Logar. Differ. $=$ 12251 som adderes til Log. 1770, der findes $= 3,2479733$

og man faaer Log. 3,2491984, der i Tabellen findes at svare til Tallet 1775; $x$ er altsaa $= 1775'' = 0^\circ\ 29'\ 35''$.

§. 20.

Opgave. For enhver given Bue ved Hielp af de kunstige trigonometriske Linier at bestemme de naturlige.

Opløsn. Man opsøger i Tabel II den Buen tilhørende Logarithme (§. 17 og 18), reducerer den, ved at formindske Kiendetallet med 10, at den passer til Radius 1, og opsøger i de simple Tal-Logarithmer (Tab. I) det dertil svarende Tal.

F. Ex. Man forlanger sin. 13° 30′, saa findes i Tab. II Log. sin. 13° 30′ = 9,3861843 og reduceret til $r = 1$, Log. sin. 13° 30′ = 0,3681851 — 1, og hertil findes i Tab. I at svare Tallet 0,2334454, ider altsaa er sin. 13° 30′, naar Radius antages = 1.

---

## III. Om plane Trianglers trigonometriske Beregning.

### A. Om de retvinklede Triangler.

§. 21.

Opgave. Naar i en retvinklet Triangel *ACB* (Fig. LIX), Hypothenusen *CB*, og den ene Cathet *CA* ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Bruges *CB* som Radius, saa er $CA = \sin. CBA$, og man har (§. 8) $CB : CA = r : \sin. CBA$ og $\sin. CBA = \frac{r \times CA}{CB}$

og

og da Vinklen $BCA = 90° - CBA$, saa er sin. $CBA$ = cos. $BCA$, følgelig cos. $BCA = \frac{r \times CA}{CB}$. Bruges nu, som almindeligt er vedtaget, Logarithmerne (de konstige trigonometriske Linier), saa er Log. sin. $CBA$ = Log. $r$ + Log. $CA$ — Log. $CB$.

F. Ex. Lad $CB = 5$, $CA = 4$, saa er

Log. $r$ + Log. 4 = 10,6020600
— Log. 5 = 0,6989700

Log. sin. $CBA$ = 9,9030900, som opsøgt i Tab. II (§. 19) giver Buen eller Vinklen 53° 7′ 48″; deraf findes Vinklen $BCA = 36°$ 52′ 12″.

Den Side i Trianglen $BA$ (der ellers let findes efter Geom. §. 37) kan ogsaa findes ved følgende Proportion:

$$r : \text{sin. } BCA = CB : BA \text{ og}$$

$$BA = \frac{CB \times \text{sin. } BCA}{r}$$ og Log. $BA$ = Log. $CB$ + Log. sin. $BCA$ — Log. $r$.

Log. 5 = 0,6988343
Log. sin. 36° 53′ 12″ = 9,7782870

Log. 5 + Log. sin. 36° 52′ 12″ = 10,4771213
Log. $r$ = 10,0000000

og Log. $BA$ = 0,4771213, som henviser til Tallet 3.

§. 22.

§. 22.

Opgave. I Triangelen $KGB$ (Fig. LIX) at finde de øvrige Stykker naar Siderne $KG$ og $KB$ ere givne.

Opløsn. Antages $BK$ til Radius, bliver $KG$ Tangent for Vinklen $B$, og man har følgende Proportion: $BK : KG = r : \text{tang. } B$ (§. 8) ɔ: Radius i Figuren til Tangenten for $B$ i Figuren som Radius i Tabellerne til Tangenten for $B$ i Tabellerne, og tang. $B = \frac{KG \times r}{BK}$, følgelig Log. tang. $B$ = Log. $KG$ + Log. $r$ — Log. $BK$. Sættes nu som i forrige Exempel $KG = 4$ og $BK = 3$, saa er Log. tang. $B$ = Log. 4 + 10,0000000 — Log. 3 = Log. tang. $53° \, 7' \, 48''$.

Anm. Af denne Opløsning sees, at naar Vinklen $B = 45° = \frac{1}{2}R$, da er $r$ ($BK$) = tang. $B$ ($GK$), hvoraf følger, at saalænge en Vinkel er mindre end 45°, er Tangenten mindre end Radius; men er Vinkelen over 45° er den større, indtil den for 90° bliver uendelig stor.

Till. 1. Vinklen $G$ findes ved at subtrahere $B$ fra 90°, altsaa her $G = 36° \, 52' \, 12''$, eller og ved at antage $KG$ for Radius, da $KB$ bliver Tangent for Vinklen $G$, og saaledes $KG : KB = r : \text{tang. } G$ og tang. $G = \frac{KB \times r}{KG}$.

Till.

Till. 2. Hypothenusen $BG$ bliver, naar $BK$ er Radius, Secans for Vinklen $B$, og kunde altsaa findes ved følgende Proportion: $r : \text{sec.}\, B = BK : BG$ og $BG = \frac{\text{sec.}\, B \times BK}{r}$; men da i de fleste Haand-Udgaver af Tabeller ingen Sekanter eller deres Logarithmer findes beregnede; pleier man ogsaa at søge den saaledes: $\text{sin.}\, B : \text{sin.}\, K$ $(= \text{sin. tot.} = r) = BK : BG$ og $BG = \frac{BK \times r}{\text{sin.}\, B}$.

Anm. Hypothenusen $GB$ kan desuden, naar Catheterne ere bekiendte, findes efter Geometrien §. 37.

§. 23.

Opgave. Naar i Trianglen $ACB$ (Fig. LIX) Hypothenusen $CB$ og en spids Vinkel $B$ ere bekiendte, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Den anden spidse Vinkel ved $C$ findes let ved at subtrahere $B$'s Grader fra $90°$ (Geom. §. 29. Till. 4), og Siderne $AC$ og $AB$ let saaledes: $r$ (sin. tot.) : $\text{sin.}\, B = BC : AC$ og $AC = \frac{\text{sin.}\, B \times BC}{r}$; ligeledes $r$ (sin. tot.) : $\text{cos.}\, B = BC : AB$ og $AB = \frac{\text{cos.}\, B \times BC}{r}$. Rigtigheden af denne Opløsning indsees af §. 8 og §. 21.

§. 24.

§. 24.

**Opgave.** Naar i den retvinklede Triangel *GKB* (Fig. LIX) den ene Cathete *BK* og den spidse Vinkel ved *B* er bekiendt, at finde de øvrige Sider og den anden spidse Vinkel.

**Opløsn.** Vinklen $BGK = 90° \dot{-} B$ (Geom. §. 29. Till.); tages nu som før (§. 22) *BK* til Radius, saa er $r$ (sin. rot.) : tang. $B = KB : KG$ og $KG = \frac{KB \times \text{tang. } B}{r}$. Fremdeles $\text{cos. } B : r = BK : BG$ og $BG = \frac{r \times BK}{\text{cos. } B}$

Anm. 1. Det sees let, at det er ligegyldigt, hvilken af de spidse Vinkler der er givet, da den anden derved tillige er bekiendt, og Opløsningen altsaa den samme.

Anm. 2. I Stedet for Proportionen $r$ : tang. $B = KB : BG$ kunde man (hvis man ikke i Tabellerne havde Tangenterne og deres Logarithmer) ogsaa bruge denne: cos. $B$ : sin. $B = BK : KG$ (§. 8 og §. 21); men hvor det er mueligt, bruger man helst den Proportion, hvori Radius eller sinus totus forekommer, da det giør Regningen lettere med Tal og Logarithmer.

Ligesaa kunde i Stedet for Proportionen cos. $B$ : $r = BK : BG$ været sat: $r$ : sec. $B = BK : BG$; men Sekanterne findes kun i faa Tabeller, og deres Logarithmer endnu i færre.

Till. Exempler til Øvelse i det her Foredragne om retvinklede Trianglers trigonometriske Beregning kan beqvemt tages af Astronomien; som af Solens og Maanens horizontale Paralaxis og Jordklodens Radius at beregne disse Himmellegemers Afstand fra Jordens Centrum, og deraf igien og af deres tilsyneladende Størrelse at beregne deres virkelige Diametre.

§. 25.

Opgave. Ved Hielp af den retvinklede Triangel og de naturlige Tabeller nøiagtigt at udmaale en Vinkel.

Opløsn. Den givne Vinkel, der skal maales, være $MAO$ (Fig. LX); efter en formindsket Maalestok afsætter man $AG = 1000$, fælder den lodrette Linie $GH$, da saaledes $GH$ er sin. $MAO$ og $AH =$ cos. $MAO$. Nu maaler man efter samme Maalestok enten $GH$ eller $AH$, og opsøger i Tabellerne efter en Radius $= 1000$ de for $GH$ eller $AH$ fundne Tal, saa findes derved Vinklen i Grader og Minuter.

Anm. Da Sinustavlerne ere beregnede almindelig efter en Radius = 10,000000, maae man, for at de i Tabellerne fundne Sinuser skal svare til $r = 1000$, af enhver bortkaste de fire sidste Cifre mod Høire og kun beholde de tre første; men da Tabel-

bellerne viise, at de tre høieste Ciffre af en Sinus blive for flere efter hinanden følgende Minuter de samme, og at kun de ringeste forandres; fremdeles at til ligestore Forandringer af Buer Forandringerne i Sinuserne er stedse mindre og mindre jo mere Buerne nærme sig 90°, saa at Forskiellen imellem Sinuser for 80 og 81 Grader ikke er saa stor som mellem Sinuser for 10 og 11 Grader, saa faaer man ved denne Maaling ikke Vinklen fuldkommen nøiagtig, men dog i smaae Vinkler paa 4 til 5 Minuter nær, og altsaa meget nøiagtigere end ved de sædvanlige Transporteurer. Ved større Vinkler kan Feilen være til mod 15 Minuter; men for at undgaae dette bruger man da Cosinus som er Sinus for den mindre Vinkel, og faaer den altsaa mere nøiagtig.

F. Ex. Sæt man fandt $GH = 939$, saa maatte Vinklen falde imellem 69° 53′ og 70° 3′; man maaler da i den Sted Linien $AH$, som vil være 342 og Vinklen $HGA = ONA$ vil da falde imellem 20° og 20° 3′, altsaa Vinklen $A$ imellem 70° og 69° 57′.

## B. Om skiævvinklede Trianglers Beregning.

§. 26.

Lærest. I enhver skiævvinklet Triangel forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne af de modstaaende Vinkler.

Beviis. 1) Triangelen være spidsvinklet $CAB$ (Fig. LII), $BA$ antages som Radius, og fra Vin-

kel-

kelspidsek *A* og *B* beskrives Buer, og fra samme Punkter fældes de lodrette Linier *AH* og *BG*, *AH* bliver sin. *B* og *BG* sin. *A*. Trianglerne *CGB* og *CAH* ere ligedanne (Geom. §. 68), altsaa $CB : BG = CA : AH$, og ved at ombytte de mellemste Lede $CB : CA = BG : AH$, d. e. $CB : CA = \sin. A : \sin. B$.

2) Triangelen være stumpvinklet *ABC* (Fig. LI); med *AC* som Radius beskrives da fra *A* og *C* Cirkelbuer, og fældes paa de forlængede Linier *CB* og *AB* de lodrette Linier *CI* og *AH*, da $CI = \sin. A$ og $AH = \sin. C$. Nu er $\Delta BCI \backsim \Delta ABH$, følgelig $BC : CI = BA : AH$ og $BC : CA = CI : AH$ d. e. $BC : CA = \sin. A : \sin. C$.

**Anm.** Paa denne Læresætning (der ogsaa kan anvendes paa retvinklede Triangler, og hvorfor er ført et almindeligt Beviis §. 9) grunder sig den trigonometriske Opløsning af alle Arter af Triangler (§. 1), som giver en langt større Nøiagtighed end ved geometrisk Tegning kan erholdes, og kan tillige anvendes paa alle retlinede Figurer der lade sig dele i Triangler. Da imellem de tre givne Ting, der bestemme en Triangels Størrelse, nødvendig maae være en Side, saa forekomme fire forskiellige Opgaver; der kan nemlig være givet 1) een Side og to Vinkler, 2) to Sider og een modstaaende

Vin-

Vinkel, 3) to Sider og een mellemliggende Vinkel, 4) alle tre Sider.

## §. 27.

**Opgave.** I Trianglen $BAC$ (Fig. LVII), naar Siden $BC$ og Vinklerne ved $B$ og $C$ ere givne, at finde de øvrige Stykker.

**Opløsn.** Da den tredie Vinkel i en Triangel altid vides af de to givne, saa er det ligegyldigt, hvilken Side der er givet, og man har

$$\left.\begin{array}{l} \sin. A : \sin. B = BC : AC \\ \sin. A : \sin. C = BC : AB \end{array}\right\}$$ Ved disse Proportioner findes de ubekiendte Sider $AC$ og $AB$.

F. Ex. Antag $BC = 329{,}76'$, Vinklen $C = 20^\circ\ 12'$, $B = 34^\circ\ 18'$, følgelig $C = 180^\circ - (34^\circ\ 18' + 20^\circ\ 12') = 125^\circ\ 30'$, og saaledes $\sin.\ 125^\circ\ 30'$ (der efter det i Forveien forklarede er $= \sin.\ 54^\circ\ 30^\circ$) : $\sin.\ 34^\circ\ 18' = 329{,}76 : AC$

og Log. $329{,}76 = 2{,}5181980$
Log. sin. $34^\circ\ 18' = 9{,}7509140$
$12{,}2691120$
Log. sin. $54^\circ\ 30' = 9{,}9106860$
Log. $AC = 2{,}3584260$, som giver $AC = 228{,}258'$.

Fremdeles $\sin.\ 54^\circ\ 30' : \sin.\ 20^\circ\ 12' = 329{,}76 : AB$

og

og Log. sin. 20° 12′ = 9,5381943
Log. 329,76 = 2,5181980

12,0563923

Log. sin. 54° 30 = 9,7106869

Log. $AB$ = 2,1457063, som giver $AB$ = 139,864′.

Anm. At sin. 125° 30′ er det samme som sin. 54° 30′, er klart af det i Forveien Forklarede (§. 3. Till. 2).

## §. 28.

Opgave. Naar i Trianglen $BAC$ (Fig. LV) de to Sider $AB$, $AC$ og den modstaaende Vinkel $B$ ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Først findes Vinklen $C$, da vi have (§. 26) $AC : AB$ = sin. $B$ : sin. $C$. Sætte vi nu $AC$ = 139,864′, $AB$ = 228,258′, og $B$ = 20° 12′, saa er

Log. 228,258 = 2,3584260
Log. sin. 20° 12′ = 9,5381943

11,8966203

Log. 139,864 = 2,1457060

Log. sin. $C$ = 9,7409143, som giver Vinklen $C$ = 34° 18′.

Vink-

Vinklen $B$ var givet: er nu $C$ fundet, saa har man Vinklen $A$ og kan finde Siden $BC$ (§ 27).

Anm. Den fundne Sin. $C$ passer (naar $C$ ikke er en ret Vinkel) baade til en spids Vinkel $= 34°$ $18'$ og til en stump $= 145° \ 42'$. I Henseende til denne Tvetydighed maae Følgende mærkes:

1) Er den givne Vinkel $B$ en ret eller stump Vinkel, da maae $C$ nødvendig være spids (Geometrie §. 18. Till. 3).

2) Er Vinklen $B$ spids og den $B$ lige over liggende Side $AC$ større end den hosliggende $AB$, saa maae ogsaa $C$ være spids, da ellers $AB$ skulde være større end $AC$ mod Forudsætningen (Geom. §. 22).

3) Er Vinklen $B$ spids, men $AC$ mindre end $AB$, saa bliver det tvetydigt, da Sin. $C$ kan passe saavel til en stump som til en spids Vinkel, naar man ikke af andre Grunde forud veed, om $C$ skal være spids eller stump.

## §. 29.

Opgave. Naar i en Triangel $BAC$ (Fig. LVII) de to Sider $BA$, $BC$ og den indsluttede Vinkel $B$ ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Man seer let, at den almindelige Sætning om Trianglers Beregning (§. 26) ikke umiddelbar her kan anvendes, da man derefter ingen Proportion kunde faae, hvori der var meer end to

bekiendte

bekiendte Størrelser, og altsaa ikke nok til at finde de ubekiendte; man maae derfor fælde en lodret Linie $AD$, hvorved man faaer to retvinklede Triangler $BAD$, og $ADC$, i $BAD$ er Siden $BA$, Vinklen $B$ og den rette Vinkel ved $D$ givet; den beregnes altsaa efter §. 21, og siden $ADC$ efter §. 23.

Anm. Foruden denne Opløsning gives en anden, der bygges paa følgende Læresætning.

§. 30.

Læres. I enhver Triangel $ABC$ (Fig. LVI) forholde Summen af de to Sider ($BC + AB$) sig til Differencen af de samme to Sider ($BC - AB$) som Tangenten til de Siderne modstaaende Vinklers halve Sum [tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$] til Tangenten af de samme Vinklers halve Difference [tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$].

Beviis. Den kortere Side $BA$ afsættes paa den længere $BC$, saa at $BE = BA$; $BC$ forlænges mod $D$, saa at $BD = BE = BA$; derpaa træffes $DA$ og $AE$. I $\triangle BAC$ er Vinklerne $BAC + ACB = 2R - ABC$; i $\triangle BAE$ ere Vinklerne $BAE + AEB = 2R - ABC$ (Geomet. §. 29. Till. 1), følgelig Vinklerne $BAC + ACB = BAE + AEB$, men $\angle BAE =$

$\angle AEB$

$\angle AEB$ (Geom. §. 13 Till. 1), altsaa $\angle BAC + \angle ACB = 2\angle BAE = 2\angle AEB$ og $\frac{1}{2}(BAC + ACB) = \angle AEB = \angle BAE$. Men er $\angle BAE = \frac{1}{2}(BAC + ACB)$, saa er $\angle EAC = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. (See Algebra §. 31).

Igiennem $C$ trækkes videre Linien $CF \neq AE$, og $DA$ forlænges til den skiærer $CF$.

Nu er Vinklen $DAE = R$ (Geomet. §. 44 Till. 3). men $DAE = DFC$, altsaa $DFC = R$; Vinklen $EAC = ACF$ (Geomet. §. 28), altsaa $ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. Antages nu $C$ som Centrum, hvorfra med Radius $CF$ blev beskrevet Buer til Maal for Vinklerne $BCF$ og $ACF$, saa bliver $DF$ = tang. $BCF$ og $AF$ = tang. $ACF$ (§. 4). Men $\angle BCF = \angle BEA$ (Geom. §. 28) $= \frac{1}{2}(BAC + ACB)$ ɔ: den halve Summa af de modstaaende Vinkler og $\angle ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ɔ: den halve Difference af de samme Vinkler; følgelig $DF$ = tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$ og $AE$ = tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB$. Endelig er (Geom. §. 60) $DC : EC = DF : AF$, men $DC = (AB + BC)$ ved Tegning; og $EC = (BC - BA)$, altsaa $BC + AB : BC - AB$ = tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$ : tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ɔ: Summen af de to

Sider

Sider i en Triangel til deres Difference, som Tangenten af de modstaaende Vinklers halve Summa til Tangenten af deres halve Difference.

Till. Antage vi nu, som §. 29, $BC$ og $BA$ og den indsluttede Vinkel $ABC$ bekiendte, saa er ogsaa $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$ bekiendt (Geometr. §. 29), og vi søge allene $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$, som findes ved den nylig beviiste Proportion.

Sæt til Exempel (Fig. LV) $BC = 329,760'$, $BA = 228,258$, og Vinklen $B = 20^\circ\ 12'$, saa er $BC + AB = 558,018'$, $BC - BA$ $101,502'$. Vinklerne $A + C$ ere $= 180^\circ - 20^\circ\ 12' = 159^\circ\ 48'$, altsaa $\frac{1}{2}(A + C) = 79^\circ\ 54'$, og vi finde altsaa $\frac{1}{2}(A - C)$ ved den nylig beviiste Proportion saaledes

$558,018 : 101,502 = \text{tang.}\ 79^\circ 54' : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(A - C)$

Log. tang. $79^\circ\ 54' = 10,7492699$

Log. $101,502' = 2,0063746$

$12,7557445$

Log. $558,018' = 2,7466482$

Log. tang. $\frac{1}{2}(A - C) = 10,0090993$, som giver $\frac{1}{2}(A - C) = 45^\circ\ 36'$. Men nu er (Algebr. §. 32) Vinklen $A = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C)$ altsaa $= 79^\circ\ 54' + 45^\circ\ 36' = 125^\circ\ 30'$ og $C = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(A - C)$, altsaa $= 79^\circ$ $54' - 45^\circ\ 36' = 34^\circ\ 18'$.

Af de fundne Vinkler findes Siden *AC* efter §. 27 eller §. 28.

§. 31.

**Opgave.** Naar i en Triangel *ACB* (Fig. LVIII) alle tre Sider ere givne, at finde Vinklerne.

**Opløsn.** Ved Anvendelsen af den (§. 26) beviste Sætning kan her de ubekiendte Stykker ikke findes, da man derved ikke kan erholde nogen Proportion hvori der ere tre bekiendte Størrelser; man maae altsaa for at faae de nødvendige bekiendte Størrelser (data) foretage følgende Construction:

Fra Vinkelspidsen *C* (den første Vinkel) fældes en lodret Linie *CI* paa den modsatte Side *AB*, derved deles Trianglen *ACB* i to retvinklede Triangler *ACI* og *ICB*. Betragte vi nu først den retvinklede Triangel *ACI*, saa ere deri Siden *AC* og Vinklen ved $I = R$ bekiendte; men vi maae efter det forhen forklarede endnu have enten en Side eller en Vinkel bekiendt. Vi foretager derfor følgende Construction for at finde Siden *AI*.

Fra Vinkelspidsen *C* (den Vinkel, hvorfra den lodrette Linie blev fældet) beskrives med Radius *CA* en Cirkel, og Linien *BC* forlænges til *D*.

Nu

Nu er (Geomet. §. 73) $AB : DB = EB : FB$, men $DB = CB + CA$ og $EB = CB - CA$, altsaa $AB : CB + CA = CB - CA : FB$. I denne Proportion, hvor de tre første Led ere givne, kan vi regne os til Linien $FB$; er denne funden, da er $AF = AB - FB$ og $AI = \frac{1}{2}AF$ bekiendte. Er paa denne Maade Linien $AI$ funden, da findes i den retvinklede Triangel $ACI$ de ubekiendte Stykker efter §. 21, og siden de øvrige Dele i $\Delta\ ACB$ efter §. 29.

Sæt for Exempel $AB = 329{,}760'$, $CB = 228{,}258'$, og $AC = 139{,}864'$, saa er efter den beviiste Proportion $329{,}768' : 368{,}122' = 88{,}394' : FB$

$$
\begin{array}{rl}
\text{og Log. } 88{,}394 = & 1{,}9464228 \\
\text{Log. } 368{,}122 = & \underline{2{,}5659917} \\
& 4{,}5124146 \\
\text{Log. } 329{,}760 = & \underline{2{,}5181980} \\
\text{Log. } FB = & 1{,}9942166,
\end{array}
$$

som giver $FB = 98{,}67717$. De øvrige Stykker findes nu let paa den forklarede Maade.

---

## IV. Trigonometriens Anvendelse paa Cirkler og regulaire Polygoner.

§. 32.

Opgave. Af en given Radius og Chorde at finde den tilhørende Vinkel ved Middelpunktet, og af Vinklen ved Middelpunktet og Chorden at finde Radius.

Opløsn. Lad Radius være $CG$ (Fig. XLVII) $= r$, og Vinklen $GCE$ en Vinkel ved Middelpunktet $= a$, saa er den Vinklen $a$ tilhørende Chorde $EG$ (som vi vil sætte $= b$) $= 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$ (§. 10), da $\Delta\ GCE$ er ligebenet. Da enhver Chorde kan ansees som Siden i en regulair Polygon, saa findes ved den Form ogsaa Siden til en regulair Polygon af $n$ Sider, naar Radius af den omskrevne Cirkel $= r$, hvis Center-Vinkel $= a = \frac{360^\circ}{n}$ (Geom. §. 54. Till. 1).

Var $b = 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$, saa er $\sin. \frac{1}{2}a = \frac{b}{2r}$ og $r = \frac{b}{2 \sin. \frac{1}{2}a}$; og saaledes kan, naar af de tre Ting, Chorde $b$, Centervinkel $a$ og Radius $r$, de to ere givne, stedse den tredie findes.

De

De i Geometrien (§. 53) forekommende Problemer ere saaledes her almindelig oploste.

Till. 1. Sætte vi $FB = l$ og ansee den som Siden i en om en Cirkel, hvis Radius er $r$, beskrevet Polygon, saa er $l$ den dobbelte Tangent til den halve Centervinkel; kalde vi den i Tabellerne brugte Radius $\varrho$, saa er $l = \frac{2r \times \text{tang.} \frac{1}{2}a}{\varrho}$.

Fremdeles: da sin. $\frac{1}{2}a$ : tang. $\frac{1}{2}a = b : l$ (§. 8) og da tang. $\frac{1}{2}a = \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}a}{\text{cos.} \frac{1}{2}a}$, saa er sin. $\frac{1}{2}a : \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}a}{\text{cos.} \frac{1}{2}a}$ $= b : l$ ɔ: $1 : \frac{1}{\text{cos.} \frac{1}{2}a} = b : l$, men sec. $\frac{1}{2}a = \frac{1}{\text{cos.} \frac{1}{2}a}$ (§. 7), følgelig $1$ : sec. $\frac{1}{2}a = b : l$ og $l = b \times \text{sec.} \frac{1}{2}a = \frac{b \times \text{sec. tab.} \frac{1}{2}a}{\varrho}$.

Till. 2. Heraf lader sig udvikle en Methode, hvorved med en høi Grad af Nøiagtighed kan findes en Cirkels Peripherie eller Omkreds. Man beregner nemlig efter den her forklarede Maade Omfanget af en indskreven eller omskreven Polygon af overmaade mange Sider. Man sætter til Exempel $\frac{1}{2}a = \frac{1}{8192} R$ (af en ret Vinkel), saa er $a = \frac{1}{4096}$ og Siden af en indvendig Polygon med

16384

16384 Sider $= b = 2r \times$ sin. $\frac{1}{2}a = 2$ sin. $\frac{1}{2}a = 0,0003834959146$. Dette Tal multipliceret med 8192 (Sidernes halve Antal) giver den halve Omkreds af en saadan indskreven Polygon $= 3,1415926241532$.

Nu er (Till. 1) $l$ (Siden i den omskrevne Polygon af samme Side-Antal) $= b \times$ sin. $\frac{1}{2}a$, men da sin. $\frac{1}{2}a = \frac{1}{\text{cos}. \frac{1}{2}a}$, saa er sin. $\frac{1}{8192} R =$

$\frac{1}{0,9999981616429380}$ og $8192 \times b \times$ sin. $\frac{1}{8192} R$ $= 3,1415926918922 =$ den halve Omkreds af en omskrevet Polygon, hvis Centervinkel er $\frac{1}{4096} R$. Imellem begge disse Størrelser (Omkredsen af den indskrevne og omskrevne Polygon) ligger Peripherien af en Cirkel, hvis Diameter $\delta = 1$, da $\varrho : \frac{1}{2}\pi = \delta : \pi$.

Anm. De her nævnte sin. $\frac{1}{8192} R$ og cos. $\frac{1}{8192} R$ ere, for at undgaae unødvendig Vidtløftighed, vel ikke her i det føregaaende beregnede, men vil let kunde findes efter §. 13 Anm. 1 og §. 7.

## §. 33.

Opgave. At beregne Indholdet $P$ af en i en Cirkel, hvis Radius er $r$, beskrevet Polygon,

lygon, naar Centervinklen er $= a$ og Siddernes Antal $= n$.

Opløsn. og Beviis. Lad $AB$ (Fig. LIII) være en af Polygonens Sider, saa er $\varrho$ : sin. tab. $a$ $= r : BD$ og $BD = \frac{r \times \text{sin. tab. } a}{\varrho}$. Nu er (Geom. §§. 98 og 100. Till. 1) $P = \frac{BD \times AC}{2} \times n$, men $AC = r$, følgelig $P = \frac{r \times \text{sin. tab. } a \times r}{2\varrho} \times n = \frac{nr^2 \times \text{sin. tab. } a}{2\varrho}$.

Till. 1. Tænke vi os en anden Polygon $\Pi$, hvis Side-Antal er $N$ og hvis Centervinkel $A$, saa er $P : \Pi = \frac{nr^2 \times \text{sin. tab. } a}{2\varrho} : \frac{Nr^2 \times \text{sin. tab. } A}{2\varrho}$ $= n \times$ sin. tab. $a : N \times$ sin. tab. $A$. Var nu $n = 4$ og $N = 12$, saa er $a = 90°$ og $A = 30°$, og altsaa sin. tab. $A = \frac{1}{2}$ sin. tab. $a$ (§. 7. Till. 3); følgelig $P : \Pi = 4 : 12 \times \frac{1}{2} =$ $4 : 6 = 2 : 3$. d. e. Fladen af en regulair indskrevet Fiirkant er $\frac{2}{3}$ af en i samme Cirkel indskrevet regulair Tolvkant.

Till. 2. Antage vi en anden Polygon at have dobbelt saa mange Sider som den første, altsaa

saa $N = 2n$, og følgelig $2A = a$, saa er $P : \Pi = n \times$ sin. tab. $2A : 2n \times$ sin. tab. $A = n \times$ sin. $2A : 2n \times$ sin. $A$. Fremdeles er sin. $2A = 2$ sin. $A \times$ cos. $A$ (§. 11), følgelig $P : \Pi = 2n \times$ sin. $A \times$ cos. $A : 2n \times$ sin. $A$ = cos. $A : 1$. Naar altsaa $A = 60^\circ$, $a = 120^\circ$, saa er cos. $A$ = sin. $30^\circ = \frac{1}{2}$, og saaledes $P : \Pi = \frac{1}{2} : 1$. d. e. En regulair Triangel er det halve af en i samme Cirkel indskrevet regulair Sexkant.

---

# Praktisk Geometrie

eller

# Landmaaling.

Ikke nogen udførlig Afhandling om den egentlige Landmaaling (der forudsætter mange Kundskaber af Optik, Mekanik og Naturlæren) maae man her vente, hvilket heller ikke er overeensstemmende med Bogens Hensigt, men kun en kort og ved nogle Exempler oplyst Anviisning til praktisk at anvende noget af de hidtil foredragne saavel geometriske som trigonometriske Sætninger.

Anm. Fuldstændig Underretning om praktisk Landmaaling findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger, 1ste Deel; desuden og i den af Hr. Justitsraaden udgivne Beskrivelse om den Opmaalingsmethode, der er brugt ved de geographiske Korters Forfærdigelse 2c.

§. 1.

Forkl. 1) Ethvert frithængende tungt Legeme (som et Blyelod i en Snor) antager en Retning, som kaldes en Vertikal-Linie. En Flade, hvorpaa en saadan Linie er lodret, kaldes horizontal (vandret), som Overfladen af stillestaaende Van-

Vande. En Flades horizontale Stilling undersøges og bestemmes ved det saakaldte Vaterpas, hvortil almindelig bruges et Glasrør, anbragt paa en Linial, fyldt med et Fluidum, hvori der er en Luftblære. Lægges nu Linialen paa en Flade, som er fuldkommen horizontal, da staaer Luftblæren i Midten af Fluidummet; i modsat Tilfælde gaaer Luftblæren til den Ende som ligger høiest, af den physiske Grund, at Luft er lettere end ethvert draabbart flydende Legeme.

2) Linier giøres synlige paa Marken ved Hielp af Afstikningsstokke, som sættes vertikale paa Jordens Overflade, der antages horizontal; og naarde sættes saaledes, at de dække hinanden, da antages de at udgiøre en ret Linie, eller egentlig at ligge alle i en Plan, der staaer lodret paa den horizontale Flade. At afstikke en ret Linie er altsaa at oprette en saadan vertikal Flade; og at finde Længden af denne Flade er at maale den rette Linie. En saadan afstukket ret Linie udmaales ved Hielp af Maalekieden (som er en af korte Leed ved Ringe sammensat Jernkiede, der almindelig er 50 Fod lang) eller ved Stokke.

3) Vinkler udmaales enten ved Snor eller Kiede eller ved Maalebordet og Astrolabium. Ved Maalebordet faaer man Vinklen aflagt umiddelbar;

delbar; ved Astrolabium derimod findes dens Størrelse i Grader, hvorefter den igien kan overføres paa Papiret eller Kortet ved Transporteuren.

Anm. En udførlig Beskrivelse af disse Instrumenter, saavelsom og af den dertil nødvendige Diopter-Lineal og Anviisning til deres Brug troer jeg her ikke passende, da den dog ikke let vilde kunde forstaaes, uden at Instrumenterne kan forevises, hvilke desuden enhver maae ved Udøvelsen have ved Haanden. De Læsere, der ønske en saadan Beskrivelse, finder den saavel i de allerede nævnte Bøger, som og i Majers gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie. Göttingen 1791-1795.

§. 2.

Opgave. Imellem to Punkter *A* og *B* (Fig. LXV) paa Marken at afstikke en ret Linie og vilkaarlig at forlænge den.

Opløsn. I *A* og *B* sættes lodrette Stokke *AE* og *BF*; i en ubestemt Afstand fra *A* sættes Stokken *CD*, der rettes saalænge, indtil alle tre Stokkene, naar Landmaaleren stiller sig noget bag *AE*, dække hinanden; de ere da alle tre i samme vertikale Flade og udgiøre en ret Linie. For at forlænge denne Linie ud paa den anden Side af *B*, stiller Landmaaleren sig noget bag Stokken *CD* og lader ved hans Medhielper sætte en fierde Stok

paa

paa den anden Side af *B*, der rettes saalænge indtil Stokkene *CD*, *BF* og den sidst satte ligge i samme Flade eller udgiøre en ret Linie.

Till. 1. Ere Punkterne *A* og *B* saaledes beliggende, at man ikke kan see fra det ene til det andet, saa indsættes i et Punkt *K*, hvorfra man kan see baade *A* og *B*, en tredie Stok, der efter Hiemaal giør en ret Linie med *A* og *B*. Derpaa sættes en Stok i *M* saaledes, at *AMK* er en ret Linie, og i *N*, saa at *KNB* er en ret Linie. Er nu ogsaa *MKN* en ret Linie, saa er alle fem Stokkene i en ret Linie; er derimod *MKN* ikke i en ret Linie, da rettes Stokkene *KMN* saalænge til de udgiøre en ret Linie.

Till. 2. Laae imellem *A* og *B* en Bakke, som Fig. LXII, da sættes paa Toppen af Bakken i Punktet *C*, hvorfra man kan see baade *A* og *B*, en Stok *Cc*. Nu afstikkes paa den forhen lærte Maade en Linie fra *A* til *C*, med den Forskiel, at Stokken *Aa* maae giøres længere, og at man sigter fra *a* til Punktet *D* (Foden af Stokken *Dd*) og fra *d* til *C* (Foden af Stokken *Cc*); dernæst afstikkes paa samme Maade en Linie fra *C* til *B*.

Anm. Ved Udmaalinger af en saadan Linie sees let, at Kieden strammes fra *a* til *D*, derpaa fra *d* til *C*, og saaledes paa den anden Side til *e*, og fra

fra *B* til *b*; disse sammenlagte Længder give da Linien *AB*.

§. 3.

Opgave. At afsætte ved Hielp af en Maalesnor eller Kiede en Vinkel paa Marken ligestor med en given Vinkel.

Opløsn. Paa Benene af den givne Vinkel *BAC* (Fig. LXVIII) afsætter man af vilkaarlig Længde *Ab*, *Ac*, og maaler Linien *bc*. Skulde nu denne Vinkel afsættes ved *C* paa Linien *CD* (Fig. LXIII), saa afsættee man fra *C* en Linie *Cd* saa stor som *Ab* og afmaaler paa Snoren en Længde $= Ac + bc$, og ved en Stok strammer den afmaalte Snor over *Cd*, saaledes at *Ce* bliver $= Ac$ og $ed = bc$.

§. 4.

Opgave. At finde en Afstand imellem to Stæder *A* og *B* (Fig. LXVII) paa Marken, som man ikke umiddelbar kan maale.

1ste Tilfælde. Naar man fra et vilkaarligt antaget Standpunkt *C* kan maale til begge Endepunkter af Afstanden ɔ: til *A* og *B*.

Man maaler da *CA* og *CB*, forlænger disse Linier paa den modsatte Side af *C*, og giør $Ca =$ $CA$,

*CA*, *Cb* = *CB*, saa er *ab* = *AB* (Geom. §. 12).

2det Tilfælde. Naar man fra det antagne Standpunkt *C* kan komme til *A*, men ikke til *B*.

Man maaler da *CA* og forlænger den, samt afsætter *Ca* = *CA*, og ved *a* en Vinkel *Cab* = *CAB* (§. 3). Nu afstikkes fra *C* en Linie mod *B*, der forlænges i den modsatte Retning indtil den skiærer den forlængede *ab* i *b*, og nu er *ab* = *AB* (Geom. §. 15).

3die Tilfælde. Naar man fra *C* hverken kan komme til *A* eller *B*.

Man afstikker fra *C* Linier mod *A* og *B*, der forlænges til den modsatte Side; derpaa vælges et Standpunkt, hvorfra man kan komme til *C* og finde Afstanden *AC*, og paa samme Maade *CB* (2det Tilfælde). Disse afsættes nu paa de forlængede Linier, nemlig *Ca* = *CA* og *Cb* = *CB*, og da bliver *ab* = *AB*.

Till. 1. Ere der Hindringer, som forbyde at afsætte de hele Linier paa den modsatte Side af *C*, da kan man afsætte proportionale Stykker af dem begge; f. Ex. *Cd* = $\frac{1}{2}$ *CA* og *Ce* = $\frac{1}{2}$ *CB*, *ed* bliver = $\frac{1}{2}$ *AB*. Man kunde og paa Linierne selv, uden at forlænge dem mod den anden Side, afsætte disse Stykker som *CE* og *CD*, da

*DE*

*DE* ligeledes er $= \frac{1}{2}AB$. Ved andet og tredie Tilfælde finder lignende Forandring Sted.

Till. 2. Hvorledes enhver Figur paa Marken (Fig. LXVIII) kan paa samme Maade optages ɔ: paa Papiret tegnes en anden ligedan dermed, indsees let. Man deler Figuren ved Diagonaler, som giøres synlige ved Stokke; i de derved opkomne Triangler maales saamange Stykker, som der behøves, for paa Papiret at kunde tegne efter en formindsket Maalestok en Figur, der er ligedan med den givne, som her *Abcdef*.

Till. 3. Ethvert Kort er i sig selv ikke andet end en paa Papiret, efter vilkaarlig mindre Maal, aftegnet Figur, ligestor med den givne paa Marken. Maalestokkens Størrelse beroer paa Omstændighederne; hos os bruge de oeconomiske Landmaalere, efter Rentekammerets Foranstaltning, den Maalestok, at een Decimaltomme paa Papiret svarer til 200 Alen paa Marken.

Anm. 1. Denne her forklarede Opløsningsmaade bruges sielden, da man ved Maalebord og Astrolabium (to Instrumenter som i det følgende beskrives), som og ved Trigonometriens Hielp, meget lettere og hurtigere kan besvare Spørgsmaalet. Imidlertid fortiener denne Maade dog at anmærkes, og er bekiendt under Navn af Landmaaling uden Instrumenter.

Man indseer nu ogsaa let, at den hele Landmaalingskunst beroer paa Læren om ligestore og ligedanne Triangler og deres Tegning, da man anseer Distancerne imellem forskiellige Steder som Sider i en Triangel, hvoraf man maaler saamange som behøves for at kunde tegne en anden Triangel ligestor eller ligedan dermed.

Anm. 2. Ved oeconomisk Landmaaling forstaaes den, som kun har med saa lidet et Stykke af Jordens krumme Overflade at giøre, at det uden Feil kan antages for en Plan, og hvor man paa Kortet skal kunde skielne enhver privat Mands Eiendom. Om denne Slags Landmaaling er det her tales. Geographisk Landmaaling behandler større Stykker af Jordkloden hvor dens krumme Overflade tillige kommer i Betragtning og grunder sig paa andre Principer.

§. 5.

Forkl. 1) Til at optage en Vinkel (ɔ: drage to Linier paa Papiret, der giøre samme Vinkel som to Linier paa Marken) betiener man sig af Maalebordet (mensula prætoriana), som bestaaer af en firkantet Bordskive (hos os almindeligt 15 Tommer lang og 11 Tommer bred), der overtrækkes med Papiir; et Stativ, hvorved Bordskiven kan gives enhver vilkaarlig Stilling, saavel vertikal som horizontal; en trebenet Fod, hvorpaa den hviler; og af Sigt-Linialen, hvorved man, efterat et

Punkt

Punkt paa Bordet er stikket lodret over Vinkelspidsen paa Marken, kan sigte til Vinklens afstukne Been, og derefter optrække Linier paa Papiret, der da vil ligge i samme Planer som de nedstukne Stokke, og følgelig giøre samme Vinkel med hinanden som de paa Marken afstukne Linier.

2) Til at maale en Vinkel paa Marken betiener man sig af en i Grader og mindre Dele inddeelt Heel-, Halv- eller Fierdedeel-Cirkel, af en halv eller heel Fods eller endnu større Diameter, som faaer Navn af Maale-Cirkel (geographisk Cirkel), Astrolabium, Qvadrant o. s. v., der ved Hielp af et Stativ fastgiøres og stilles paa en Fod, begge af samme Indretning som ved Maalebordet, tillige er den forsynet med een eller to Diopter Linialer, hvoraf den ene lader sig dreie om Vinkelmaalerens Centrum.

Anm. At forklare disse Instrumenter nøiere, anseer jeg for overflødigt, da de bør forevises ved Underviisningen, hvis deres Indretning ret skal begribes. Udførlig findes de ellers beskrevne i Justitsraad Bugges Forelæsninger, 1ste Deel.

Till. Man bruger ogsaa til Vinklers Udmaaling en Boussole ɔ: en i Grader inddeelt Ring, over hvis Middelpunkt en Magnetnaal frit kan bevæge sig.

Anm. Hvilket af de anførte Instrumenter der helst bør bruges, beroer paa Omstændighederne. Ved

Opmaalinger i det Smaae (oeconomisk Landmaaling) er Maalebordet det brugbareste; men i det Store, hvor man tillige vil anvende Trigonometrie, er Vinkelmaaleren Astrolabium beqvemmere.

## §. 6.

**Opgave.** At opløse de §. 4 fremsatte Opgaver ved Hielp af Maalebordet.

1ste Tilfælde. Naar man kan fra et Standpunkt *C* (Fig. 39 Tab. 3) komme til *A* og *B*.

Man stiller da Maalebordet over *C* saaledes, at Punktet *C* paa Bordet er lodret over *C* paa Marken; med Diopter-Linealen sigtes fra *C* mod *A* og *B* og Linierne optrækkes paa Bordet, og efter en formindsket Maalestok giøres *Ca* og *Cb* paa Bordet ligestore med *CA* og *CB* paa Marken. Maales nu Afstanden *ab* paa Bordet, saa er den i det mindre Maal hvad *AB* er i det større.

2det Tilfælde. Naar man fra et Standpunkt *C* (Fig. XL Tab. 3) kan komme til *A*, men ikke til *B*.

Man stiller Maalebordet over *C* og sigter mod *A* og mod *B*, optrækker Linier derefter paa Bordet, og giør efter en formindsket Maalestok $cA = CA$. Derpaa flyttes Maalebordet til *A*, og stilles, at *A* paa Bordet kommer over *A* paa Marken og sigter mod *B*. Paa Bordet forlænges nu

Lini-

Linierne fra $A$ og $C$ til de skiære hinanden i $b$, og da er $ab$ paa Bordet i det mindre Maal, hvad $AB$ paa Marken er i det større.

Till. Vil man, uden at flytte Maalebordet hen over Punktet $B$, maale Afstanden allene fra $C$, saa stiller man Punktet $c$ paa Bordet lodret over $C$ paa Marken (Fig. LXIII. Tab. 6); i en temmelig Afstand derfra nedstikkes to Stokke $D$ og $E$, der med $A$ udgiøre en ret Linie; derpaa sigter man fra $c$ til $D$, $E$, $A$ og $B$, optrækker Sigt-Linierne, og giør efter en formindsket Maalestok $cd$, $ce$, $ca$ og $cb$ ligestore med $CD$, $CE$ og $CB$. Trækkes nu fra $d$ igiennem $e$ en Linie, som forlænges, da vil den skiære $cA$ i $a$; da er $ab$ i det mindre Maal, hvad $AB$ er i det større.

Thi $\triangle\ ced \sim CED$, følgelig $\angle\ cda = CDA$, men ogsaa $\angle\ acd = ACD$, altsaa $\triangle\ dac \sim \triangle\ DAC$ og $ca : cd = CA : CD$, men efter Construction $cd : cb = CD : CB$, altsaa $ca : cb = CA : CB$; og da $\angle\ acb = \angle\ ACB$, saa er $\triangle\ acb \sim \triangle\ ACB$, følgelig $cb : ba = CB : BA$.

3die Tilfælde. Naar man fra $C$ hverken kan komme til $A$ eller $B$.

Fra Punktet $C$ (Fig. XII Tab. 4) afstikkes Linier mod $A$ og $B$, som forlænges paa den anden

Side

Side af $C$, og en Stok nedsættes i disse forlængede Linier i $E$ og $D$. Man stiller Maalebordet over Punktet $E$, og afmaaler paa Bordet efter formindsket Maalestok $ed = ED$; fra $e$ optrækkes Sigt-Linierne $em$, $en$. Nu flyttes Maalebordet, Punktet $d$ paa Bordet bringes nøiagtig over Punktet $D$ paa Marken, og Linien $de$ i samme Retning som $DE$. Fra $d$ sigtes nu mod $A$ og $B$; og man mærker nøie hvor disse Linier skiære de forrige fra Punktet $e$ trukne Sigt-Linier i $a$ og $b$, saa er Linien $ab$ paa Bordet i det formindskede Maal, hvad $AB$ er paa Marken i det virkelige Maal. Beviset herfor er let, da Figuren $dab$ paa Bordet bliver ligedan med $DEAB$ paa Marken.

Till. 1. Hvorledes alle tre Tilfælde ved Hielp af Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler kan opløses, indsees let; man maaler nemlig de nødvendige Vinkler og Sider, og tegner paa Papiret en ligedan Triangel, hvori man kan maale det Søgte.

Till. 2. Ved Trigonometrien opløses disse tre Tilfælde endnu lettere, da man, efter at have maalet de til en Triangels Bestemmelse nødvendige Stykker, regner sig til de øvrige (Trigon. §. 1).

§. 7.

§. 7.

**Opgave.** Ved Hielp af Instrumenter at optage en Grundtegning af en Figur paa Marken ɔ: at tegne en Figur paa Papiret ligedan med en anden paa Marken.

**Opløsn.** I Almindelighed bestaaer det i, at man inddeler Figuren paa Marken i Triangler og maaler saa meget af enhver, som behøves for at frembringe paa Papiret en ligedan Triangel. Men efter de forskiellige Omstændigheder kan der gives forskiellige Tilfælde; jeg vil her anføre allene de mærkeligste.

1ste Tilfælde. Naar man kan komme ind i Figuren og efter Behag afstikke og maale Linier.

Man vælger da et Punkt *C* (Fig. XIV Tab. 4) i Figuren, hvorfra man kan, om muligt, see til alle dens Hiørner. I dette Punkt opstilles Maalebordet saaledes, at et Punkt *c* paa Bordet er lodret over Punktet *C* paa Marken. Man optrækker da Sigt-Linier til alle Figurens Vinkelspidser *Ca*, *Cb*, *Cc*, *Cd*, *Ce* og *Cf*, og efter den formindskede Maalestok giøres disse Linier ligestore med *CA*, *CB*, *CC*, *CD*, *CE*, *CF*; derpaa trækkes Linierne *ab*, *bc*, *cd*, *ef* og *fa*, saa er Figuren *abcdef* paa Maalebordet ligedan med Figuren *ABCDEF* paa Marken.

Anm.

Anm. Ere der Hindringer, som giorde det umuligt at maale en eller anden af Linierne fra *C*, som f. Ex. *CA*, da maaler man i dets Sted Siden *AB*, og fra *b* med en Radius, der efter den antagne Maalestok er ligestor med *AB*, afskiærer man *ba*.

Till. Vil man istedet for Maalebordet bruge Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler, da stilles det i Punktet *C*, og alle Vinklerne ved *C* maales, da deraf og af de fra *C* til Vinkelspidserne maalte Linier, en Figur kan tegnes paa Papiret ligedan med den paa Marken.

2det Tilfælde. Naar man ikke kan komme ind i Figuren.

Man stiller Maalebordet over en af Figurens Vinkelspidser *A* (Fig. XV), optrækker Sigtlinier mod *E* og *B*, og giør efter den formindskede Maalestok $ab = AB$. Derpaa flyttes Bordet hen over *B*, saa at *b* kommer lodret over *B* og *ba* i Linie med *AB*. Fra *b* sigtes nu mod *C*; og har man fra *A* optrukket Sigtlinien *ac*, saa er nu *c* bestemt uden at maale *AC*. Saaledes vedblives indtil man har den hele Figur.

Till. 1. Kan man fra en Vinkelspidse overse hele Figuren, da stiller man Maalebordet over denne Vinkelspidse *A* (Fig. XVI) og optrækker Sigtlinier til alle de andre Hiørner; man maaler derpaa *AB* og afsætter efter den antagne Maalestok $ab = AB$

= *AB*; med en Pasſer-Aabning, der er paa ſamme Maade ligeſtor med *BC*, afſkiæres *bc* o. ſ. f.

Till. 2. Har man med en Vinkelmaaler maalt alle Vinklerne ved *A* og desuden Siderne i Figuren, da kan deraf paa Papiir tegnes en Figur ligedan med den paa Marken.

3die Tilfælde. Naar man fra to Standpunkter kan overſee alle Figurens Sider og Vinkler.

Den antagne Standlinie være *FG* (Fig. LXVI Tab. 6). Man ſtiller Maalebordet over den ene Ende *F*, ſaa at *f* paa Bordet er lodret over *F* paa Marken, og ſigter ſaa af *fg* paa Bordet (der gives i det mindre Maal ligeſtor med *FG* paa Marken) kommer i lige Linie med *FG*, og derpaa drages fra *f* Sigtlinier til alle Vinkelſpidſer i Figuren; derpaa flyttes Maalebordet og ſtilles i *G*, ſaa at *g* paa Bordet bliver lodret over *G* paa Marken og *gf* i ſamme Retning ſom *GF*. Fra *G* ſigtes nu til alle Figurens Hiørner; disſe Sigtlinier vil overſkiære de tilforn fra *F* trukne, og ſaaledes beſtemme Figurens Hiørner, der forbindes med rette Linier, og Figuren *abcde* bliver ligedan med *ABCDE* paa Marken.

Till. Ved ſamme Fremgangsmaade beſtemmes Beliggenhed af de forſkiellige Gienſtande, ſom fra en ſaadan antaget Standlinie kan ſees.

Anm.

Anm. Stand-Linien maae ikke være alt for kort, ikke give alt for spidse eller stumpe Vinkler, og dens Længde maae paa det nøiagtigste maales.

§. 8.

Forkl. Ved Høiden af en over Jorden ophøiet Gienstand forstaaes en lodret Linie fra Gienstandens Spidse til Jorden. At finde denne perpendiculair kaldes Høidemaaling, og skeer lettest ved Trigonometrie. Faldet eller Skraaningen fra et Punkt paa Jordens Overflade til et andet er Forskiellen imellem to Stæders Horizont. At bestemme den kaldes Nivellering (Vandmaaling), og forudsætter mathematisk-geographiske Kundskaber.

§. 9.

De mærkeligste Tilfælde ved Høidemaaling er

1) Naar man fra et antaget Standpunkt $C$ (Fig. XIII Tab. 4) kan komme til den nederste Ende $B$ af den lodrette Høidelinie $AB$.

Man maaler da Linien $CB$, over $C$ stilles Instrumentet (Maalebordet eller Astrolabium), hvor Høiden antages $= CE$, og derved maales Vinklen $FEA$; man har da $EF = BC$, Vinklen $AFE = R$ og Vinklen $AEF$ bekiendt. Heraf kan ved Tegning, og lettere ved trigonometrisk Beregning, findes Linien $AF$; lægges dertil $BF = CE$ (Instru-

strumentets Høide), saa er den søgte Høide $AB$ fundet.

2) Naar man ikke fra det antagne Standpunkt $C$ kan komme til $B$.

Man maaler da i en ubestemt Afstand fra $B$ Standlinien $CD$, stiller Instrumentet over $C$, og bestemmer Vinklen $AEF$ og derved tillige $AEG$. Derpaa føres Instrumentet hen over $D$, og Vinklen $AGE$ bestemmes. Af disse Vinkler og Siden $EG = CD$ kan Triangelen $AEG$ bestemmes ved Tegning eller Beregning. Er det skeet ved Tegning, og man fra $A$ fælder en lodret Linie $AF$ paa den forlængede $EG$, saa vil den i det formindskede Maal, naar den nøiagtig udmaales, være hvad $AF$ virkelig er; og lægges hertil som før Instrumentets Høide $FB$, da findes Linien $AB$. Har man ved Trigonometrie af de maalte Ting i $\Delta$ $AEG$ fundet $AE$, saa kan man i $\Delta$ $AFE$ videre regne sig til $AF$ og dertil lægge $FB$.

Anm. Den antagne og maalte Stand-Linie (hvorved forstaaes en vilkaarlig antagen Linie) maae ikke være for kort, som $EC$ (Fig. LXI), da Vinklen $aAC$ bliver saa liden, at den ikke nøiagtig kan maales, men heller maae den, naar Omstændighederne tillade det, tages tilstrækkelig lang, som $ED$.

Till. Indtræffer det næstforegaaende Tilfælde med den Omstændighed, at man fra det over

Stand-

Standpunktet *C* (Fig. XIII Tab. 4) liggende Punkt *E* kan see Punktet *B*, som ligger lodret under *A*, da kan man fra dette ene Punkt bestemme *AB* paa følgende Maade: Ved Hielp af Instrumentet maaler man Vinklerne *AGE* og *GDC*, hvorved man har tillige Vinklen *EDB*, som er = *R* — *BDG* *DG* = Instrumentets Høide er ogsaa bekiendt. Man kan da efter den formindskede Maalestok afsætte Linien *DC*, og ved *D* Vinkirn *BDG*, samt fra *C* en lodret Linie, der vil skiære *DB* i Punktet *B*; fra dette Punkt *B* oprettes en lodret Linie, som forlænges indtil den skiæres af *DA* i Punktet *A*.

Anm. 1. Denne Maade lader sig ikke vel anvende, naar Høiden, man vil finde, er meget stor i Sammenligning med Instrumentets Høide, eller naar *AB* er mange Gange større end *CD*.

Anm. 2. Om Nivellering troer jeg det her ikke passende at anføre noget.



# Om krumme Linier

i

# Almindelighed.

# Indledning.

§. 1.

Ved en krum Linie forstaaes enhver Linie, der kan tænkes at blive til ved Bevægelsen af et Punkt der hvert Øieblik forandrer sin Retning.

For at bestemme en saadan krum Linies Egenskab (Natur) maa man søge at udfinde den Lov, som Punktet retter sig efter i sin Bevægelse; og udtrykke denne Lov ved en Ligning (Æqvation). Denne Lov bestemmer den krumme Linies Natur.

Den Lov f. Ex. som Punktet $M$ (Fig. 1) følger i at beskrive en Cirkel, er, at det stedse beholder samme Afstand fra Centrum. Denne Lov eller Cirkelliniens Natur kan paa følgende Maade udtrykkes ved en Ligning: Man tage et vilkaarligt Stykke af Diameteren $AB$, for Exempel $AP$, (som kaldes $x$) opreise fra Punktet $P$ en lodret Linie til Peripherien $PM$ (som nævnes $y$) og Diameteren $AB$ sættes $= a$, saa har man (Geom.

(§. 58

§. 58) $AP. PM = PM : PB$, ɔ: $x : y = y : (a - x)$ og
deraf $y^2 = (a - x)\,x = ax - x^2$

følgelig $y = \sqrt{ax - x^2}$

Denne fundne Ligning viser hvorledes ethvert Punkt i Cirkellinien kan bestemmes naar Diameteren $a$ er givet; da man til ethvert antaget $x$ kan finde det dertil hørende $y$ ved Hielp af den fundne Ligning; udtrykkes $a$ og $x$ i Tall, da findes $y$ ved Regning; udtrykkes de derimod i Linier, da findes $y$ ved at forandre den fundne Ligning til sen Proportion, og vi faae da $x : y = y : a - x$ ɔ: det til ethvert antaget $x$ svarende $y$ er en Mellemproportionallinie imellem det antagne $x$ og det af Diameteren tilbageblevne Stykke $a - x$.

Sæt f. Ex. $a = 10$, antag $x = 1$, da bliver $a - x = y^2$ og $y = \sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$ lad $x$ være $= 2$, da bliver $y = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4$. Er $x = 3$ bliver $y = \sqrt{30 - 9} = \sqrt{21} = 4{,}5$ ... $x = 4$ er $y = \sqrt{40 - 16} = \sqrt{24} = 4{,}9$ .... $x = 5$ og $y = \sqrt{50 - 25}$ $\sqrt{25} = 5$.

Hvorledes Mellemproportionallinier imellem de forskiellige antagne $x$ og det øvrige af Diameteren $a - x$ findes, er lært i Geom. §. 59.

§. 2.

## §. 2.

De krumme Linier, hvis Natur kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, (en algebraisk Ligning kaldes den, der kan ordnes og indrettes saaledes, at der i den ikke findes noget irrationalt Leed; og at ingen foranderlig Størrelse forekommer deri enten som Nævner eller Exponent) faae Navn af algebraiske krumme Linier. Saaledes er Ligningen $y = \pm\sqrt{px}$, da den ogsaa saaledes kan udtrykkes $y^2 = px$, en algebraisk Ligning, og altsaa er den krumme Linie (Parablen), hvis Natur udtrykkes ved den anførte Ligning, en algebraisk krum Linie.

Derimod faae de krumme Linier, hvis Natur ikke lader sig udtrykke ved nogen algebraisk Ligning, eller i hvis Ligninger der findes Cirkelbuer, Sinuser, andre trigonometriske Funktioner og Logarithmer eller uendelige Rækker, der ikke nøie lade sig summere, Navn af mekaniske eller transcendente Linier. Exempel paa saadanne krumme Linier ere de der udtrykkes ved følgende Ligninger:

1) $y = \sqrt{2 - x^2} + \text{an} : \text{cos}. (1 = x)$.

2) $y = a \text{ Log}. x$, $y = b + bx + \frac{bx^2}{1 \times 2} + \frac{bx^3}{1 \times 2 \times 3} \ldots$

§. 3.

For at bestemme en krum Linies Natur (Fig. I. Tab. 2.) som ligger i en og samme Flade, ved Hielp af en Ligning; pleier man almindelig i samme Flade at trække en vilkaarlig ret Linie (*AB*), og fra forskiellige Punkter i samme at opreise Perpendiculærer til forskiellige Punkter i den krumme Linie. Man antager derpaa i den rette Linie *AB* forskiellige Stykker *AP*, regnede enten fra Giennemsnitspunktet *A*, hvor den krumme Linie skiærer *AB*, eller fra et andet vilkaarligt Punkt i *AB*, og søger at finde et Udtryk for ethvert *PM* ved Hielp af det tilhørende Stykke *AP* og andre bekiendte Størrelser. Den antagne Linie *AB* kaldes Abscisse-Linien; det paa samme antagne faste Punkt *A* hedder Abscissernes Begyndelsespunkt. De fra forskiellige Punkter i Abscisse-Linien til den krumme Linie dragne Linier (almindelig lodrette), kaldes Ordinater, og de dertil hørende Stykker paa Abscisse-Linien (regnede fra det antagne faste Punkt) kaldes Abscisser, som her Stykkerne *AP*, *AE* ꝛc.

Efter den almindelige Vedtægt betegnes enhver Abscisse med $x$, og den dertil hørende Ordinate med $y$ (disse ere de foranderlige Størrelser). De uforanderlige rette Linier, som tiene til at bestemme en krum Linies Beliggenhed, benævnes almin-

mindelig med Bogstaverne *a*, *b*, *c*. De gamle Geometere kaldte *Mm* en Ordinate eller Applicata, og *PM* eller *Pm* en halv Ordinate.

Deler Abscisse-Linien alle fra et Punkt til et andet i den krumme Linie parallel igiennem den trukne Linier i to ligestore Dele, eller (hvilket er det samme) naar til enhver Abscisse hører to ligestore Ordinater i modsatte Retninger, faaer den Navn af den krumme Linies Diameter. Den Diameter der deler de ommeldte Paralleler under en ret Vinkel i to ligestore Dele, faaer i Synderleshed Navn af den krumme Linies Axel.

§. 4.

En ret Linie *TM* (Fig. II Tab. 7), som, trukket i samme Flade, berører en krum Linie i et eneste Punkt *M*, uden at skiære den, kaldes en Tangent til Punktet *M*. Stykket (*PT*) af Abscisse-Linien, der ligger imellem Ordinaten *PM* og Punktet *T*, hvor Tangenten skiærer Abscisse-Linien, kaldes Subtangent. Den rette Linie *MN*, som fra Berøringspunktet *M* opreises lodret paa Tangenten *TM* og forlænges til Abscisse-Linien, kaldes Normal-Linie v. Normalen, og Stykket *PN* af Abscisse-Linien, imellem den til Punktet *M* hørende ordinate *PM* og Punktet *N*, hvor den fra

 *M* op-

*M* opreiste lodrette Linie træffer Abscisse-Linien, kaldes Subnormal-Linie eller Subnormalen.

En ret Linie *TO* (Fig. 2) der nærmer sig den krumme Linie *AM*, uden dog nogensinde at skiære den, om de end begge forlænges nok saa langt, kaldes den krumme Linies Asymptote. At der virkelig gives krumme Linier som har Asymptoter, faae vi Leilighed at vise i det følgende.

§. 5.

Naar en af de foranderlige Størrelsers ($x$ eller $y$) høieste Exponent eller Summen af begge Exponenter af et Leed i en ordnet Ligning for en algebraisk krum Linie er $= 2$, saa kaldes den dertil svarende krumme Linie en Linie af 2den Orden eller en krum Linie af 1ste Orden. Er derimod den høieste Exponent eller den høieste Summe af begge Exponenter $= 3$, saa kaldes den dertil hørende krumme Linie en Linie af 3die Orden, eller en krum Linie af anden Orden. Man regner desuden de algebraiske krumme Linier af forskiellige Ordener, hvis Ligninger indeholde Leed af een Slags, hvis Exponenter blot ere forskiellige, til samme Familie, saaledes f. Ex. høre alle de krumme Linier, hvis Natur udtrykkes ved følgende Ligninger: $y^2 = px$, $y^3 = p^2x$, $y^3 = px^2$,

$y^4 =$

$y^4 = p^3x$, $y^4 = p^2x^2$, $y^4 = px^3$, $y^{m+n} = p^m x^n$, til een og samme Familie.

Anm. Ved at undersøge de krumme Linier, maa man lægge Mærke til 1) enten af den krumme Linies Beliggenhed, saaledes som den dannes ved Snittet igiennem et Legeme, at udlede en Ligning, hvorved dens Natur tilkiendegives; eller af den givne Ligning at tegne den derved bestemte krumme Linie, som altid kan giøres arithmetisk; i det følgende skal vises, at det og kan giøres saavel geometrisk som mekanisk. 2) Til ethvert givet Punkt i den krumme Linie at finde den tilhørende Tangent, Subtangent, Normale og Subnormale. 3) At bestemme Stedet for den største eller mindste Ordinate. 4) At beregne Flade-Indholdet, som indsluttes af en vis Abscisse, den dertil hørende Ordinate og Bue. 5) At bestemme den virkelige Længde af en given Bue.

## §. 6.

**Opgave.** At finde en Ligning for Cirklen.

Opl. Man trækker Diameteren $AB$ (F. I T. II) og fra forskiellige Punkter paa den opreises lodrette Linier til Omkredsen; saa er enhver af disse en Mellemproportionallinie imellem Diameterens Stykker $AE$ og $EB$, eller saa er $AE : ED = ED : EB$ (Geomet. §. 64.)

Antager man nu $AB = a$ (Fig. I. Tab. 2), $PM = y$, $AP = x$ altsaa $PB = a - x$,

saa

saa er $x : y = y : a - x$, altsaa $y^2 = ax - x^2$, som er Ligningen for Cirkelen.

Till. 1. Denne Ligning indeholder to ubekiendte Størrelser og er ubestemt, men antages den eene som bekiendt, bliver den anden derved bestemt. Antager man nemlig et vilkaarligt Stykke af Diameteren som $AP = x$, hvortil efter Ligningen hører et vist $y$, og opreiser fra $P$ en lodret Linie $PM$, af samme Længde som $y$, saa finder man Punktet $M$ i Omkredsen. Man seer heraf tillige Punktet $M$'s Beliggenhed imod Linien $AB$, da ved $AP$ Punktet $P$, og ved $PM$ Punktet $M$ er bestemt.

Till. 2. Da ethvert Punkt i Omkredsen ligger i en saadan lodret Linie (ordinate) og til denne hører et vist Stykke af Diameteren (Abscisse) saa kan alle Punkter i Omkredsen bestemmes, naar man paa Diameteren $AB$ antager alle mulige Værdier for $x$.

Da der nu ikke gives noget Punkt i Cirkelens Omkreds, som jo lader sig bestemme ved denne Ligning, saa kan den ansees som en fuldstændig Definition paa Cirkel-Linien, hvoraf dens Natur ɔ: dens forskiellige Punkters Beliggenhed mod hinanden, nøiagtigt lader sig bestemme.

§. 7.

§. 7.

Forklar. I den i forrige §. anførte Ligning forandre Størrelserne $x$ og $y$ deres Værdie efter en bestemt Lov, som er: at naar enhver af disse Størrelser tillægges en vis Værdie, vil den næste efterfølgende ikke have nogen mærkelig Forskiæl i Størrelse. Størrelser af denne Art, der kan tillægges alle mulige Værdiee, kaldes foranderlige Størrelser (Variabiles) i Modsætning af de bestandige, som under alle Forandringer af $x$ og $y$ stedse beholde samme Værdie. De foranderlige Størrelser pleier man at betegne med de første, og de bestandige eller uforanderlige med de sidste Bogstaver i Alfabetet.

§. 8.

Forklar. En foranderlig Størrelse $y$, som bestemmes ved en anden foranderlig Størrelse $x$, og ved en bestandig Størrelse $a$ kaldes en Function af Størrelsen $x$, f. Ex. Udtrykket $ax - x^2 = y^2$ er en Funktion af $x$ og giver Ligningen for Cirkel-Linien.

En ret Linie som $AB$ (Fig. I) ved hvilken Punkterne i den krumme Linie bestemmes, kaldes Abscisse-Linie; Punktet $A$ dens Begyndelsespunkt. Stykkerne deraf (som $AP$ $AE$) kaldes Abscisser,

og

og deres Funktioner (som *PM*, *DE*) Ordinater; med et fælles Navn kaldes begge Coordinater, og retvinklede, naar den ene staaer lodret paa den anden.

Till. Coordinaterne kan sættes sammen under alle mulige Vinkler, kun at den eengang antagne stedse beholdes, for at alle Ordinater kan blive parallele. For Cirkel-Linien have vi antaget retvinklede Coordinater (§. 6), som ogsaa siden skal iagttages ved de andre krumme Linier, ligesom og Abscisserne stedse skal betegnes med $x$, og Ordinaterne med $y$, saalænge indtil en anden Benævnelse udtrykkelig anføres.

Till. 2. Enhver ret Linie, der ligger i samme Flade som den krumme Linie, kan antages som Abscisse-Linie, og ethvert Punkt i den regnes for Begyndelsespunktet.

§. 9.

Opgave. At finde en Ligning for Cirklen fra dens Middelpunkt (naar Middelpunktet tages for Abscissernes Begyndelsespunkt).

Opløsn. Antage vi Ordinaten $PM = y$, men Abscissen $CP = u$ og $AB = a$, saa er $AP = \frac{1}{2}a + u$, men $PB = \frac{1}{2}a - u$. Efter Geometrien (§. 64) er $AP : PM = PM : PB$, altsaa (naar de vedtagne Udtryk indsættes)

sættes) $\frac{1}{2}a + u : y = y : \frac{1}{2}a - u$ og $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, hvilket og indsees af den pythagoriske Læresætning, naar $CM$ giører $= \frac{1}{2}a$.

Till. De to for Cirklen saaledes fundne Ligninger, nemlig 1) $y^2 = ax - x^2$ (hvor $A$ var Abscissernes Begyndelsespunkt) og den nu fundne 2) $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, lade sig udlede den ene af den anden. Saaledes er $AP = AC + CP$ ↄ: $x = \frac{1}{2}a + u$; indsættes nu denne Værdie for $x$ i Ligningen $y^2 = ax - x^2$, faaer vi $y^2 = a(\frac{1}{2}a + u) - (\frac{1}{2}a + u)^2 = \frac{1}{2}a^2 + au - (\frac{1}{4}a^2 + au + u^2) = \frac{1}{4}a^2 - u^2$.

Fremdeles er $CP = AP - AC$ ↄ: $u = x - \frac{1}{2}a$; indsættes denne Værdie for $u$ i Ligningen $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, faae vi $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - (x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2)$ ↄ: $y^2 = ax - x^2$.

Af Ligningen $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$ følger, at $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$, som giver to ligestore men modsat liggende Ordinater $PM$ og $Pm$. Til ethvert $x$ hører saaledes $2y$ i modsatte Beliggenhed, hvoraf den ene kan ansees som nægtende, den anden som bekræftende. Cirkel-Linien gaaer altsaa frem paa begge Sider i samme Afstand fra Diameteren. Paa samme Maade blive, naar $C$ antages som Abscissernes Begyndelsespunkt, og

Abscis-

Absciserne mod $B$ antages som bekræftende, de mod $A$ benægtende.

Anm. Man kan saaledes for samme Linie give flere forskiellige Definitioner, der alle udledes af Liniens Egenskaber, og hvoraf den ene kan udledes af den anden.

§. 10.

Forkl. En ret Linie $AB$ som halverer de parallele Chorder af en krum Linie enten under en skiæv eller en ret Vinkel; faaer i begge Tilfælde Navn af den krumme Linies Diameter, og i sidste af dens Axel. Det Punkt af Axlen hvor den skiæres af den krumme Linie kaldes Liniens Toppunkt (vertex), hvortil ingen Ordinate hører eller, som er det samme, hvis Ordinate er $= 0$.

Anm. 1. Af de krumme Linier, hvormed den høiere Geometrie især har at giøre, er næst Cirkelen (der dog ogsaa betragtes i Elementar-Geometrien) de mærkeligste Parablen, Hyperblen, Ellipsen, hvilke almindeligt faae Navn af Kegelsnitte, da de lade sig udskiære af en en ret Kegle. Man kan betragte disse Linier paa to Maader; enten udleder man af deres Beliggenhed i Keglesnittet deres Ligninger, eller og man af de givne Ligninger bestemmer de dertil hørende Linier. Den sidste Methode (almindeligt kaldet den analytiske) vil jeg her følge, dog tillige kortelig berøre den første (den synthetiske).

Anm. 2. Lad $p$ være en bestandig Linie i Keglesnittene (almindelig kaldet paramenter) der antages som den ene Sidelinie i en Rectangel, hvor Abscissen $x$ er den anden, saa er Qvadratet af den til Abscissen svarende Ordinate $y^2$ enten ligestor med denne Rectangel $y^2 = px$, eller større $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, eller mindre $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, dette udtrykte Grækerne ved Ordene παραβαλλειν (congruere) υπερβαλλειν (excedere) og ελλειπειν (dificere). Deraf kom Navnene Parabel, Ellipse og Hyperbel.

Anm. 3. Theorien om Keglesnittene er i Physik og Astronomie aldeles nødvendig, da f. Ex. alle udkastede Legemer beskrive en Parabel, og Planeterne bevæge sig i Ellipser omkring Solen.

---

## I. Om Parablen.

### §. 11.

Forkl. Parablen kaldes den krumme Linie, hvor med Forudsætning af retvinklede Coordinater $y^2 = px$ ɔ: Qvadratet af Ordinaten er ligestor med et Rectangel af den bestandige Linie Parameteren $p$ og Abscissen.

Till. Af den givne Æqvation findes følgende Proportion $x : y = y : p$ ɔ: den til enhver

Absciss-

Absciße ($x$) svarende Ordinate ($y$) er en Mellemproportional Linie imellem den antagne Absciße og den bestandige Linie Parameteren ($p$). Herved oplöses let følgende Opgave.

§. 12.

Opgave. At bestemme ethvert Punkt i Parablen ved Hielp af Elementar-Geometrien.

Oplösn. Man trækker en ret Linie $AQ$ (Absciße-Linien) hvor $A$ antages at være Absciß-sernes Begyndelsespunkt, og fra $A$ i den modsatte Retning afsættes $AB$ ligestor med den bestandige Linie Parameteren. For en vilkaarlig Absciße $AP$ beskriver man over $BP$ en Halv-Cirkel, opreiser fra $A$ til Cirklens Peripherie en lodret Linie $AG$; videre opreises fra $P$ en lodret Linie $PM$, som ved at trække $GM \mp AP$ giøres $= AG$, og nu er Punktet $M$ et Punkt i Parablen.

Paa samme Maade bestemmes flere Punkter i Parablen nær ved hinanden, og forbindes ved en Linie, trukket paa fri Haand, hvorved Parablen tegnes.

Till. 1. Parablen bliver af Axlen $AQ$ deelt i to congruente Dele.

Till.

Till. 2. Antages $y = 0$, bliver $x = 0$, Parablens Axel overskiæres altsaa af Parablen. Ved Abscissernes Begyndelsespunkt $A$, som derfor faaer Navn af Parablens Toppunkt.

Till. 3. Saalænge $x$ (Abscissen) antages bekræftende, bliver $px = y^2$ ogsaa bekræftende, altsaa $\sqrt{y^2} = \sqrt{px}$ en mulig Størrelse, der voxer efterhaanden som $x$ voxer (da $p$ er en bestandig Størrelse); tænkes altsaa $x$ at tiltage uden Ende, vil $y$ ligeledes. Parablens Grene løbe altsaa fort paa begge Sider af Axlen uden Ende, og fierne sig stedse længere fra hinanden.

Till. 4. Antages Abscissen $x$ at voxe ved et Tillæg af Størrelsen $PQ = g$, og Ordinaten ved et Tillæg af $NH = v$, saa at $PM = QH = \sqrt{px}$, følgelig $QN = v + \sqrt{px}$; nu er ogsaa $QN = \sqrt{p \times AQ} = \sqrt{p(x+g)}$, altsaa $v + \sqrt{px} = \sqrt{p(x+g)}$, eller naar begge Størrelser qvadreres $v^2 + 2v\sqrt{px} + px = px + pg$, følgelig $v^2 = pg - 2v\sqrt{px}$.

Lader man nu Abscissen bestandigt voxe ved et Tillæg af en uforanderlig Størrelse $g$, saa at $pg$ bliver uforanderlig, saa kan i den forrige Ligning, naar $x$ voxer, $v$ hverken være uforanderlig, heller ikke voxe tilligemed $x$, da i begge Tilfælde $v^2$ skulde

de blive mindre, som strider mod det anførte. $y$ bliver altsaa mindre naar $x$ bliver større.

Naar derfor to Abscisser, $x$ og $X$, voxe ligemeget, vil Ordinaten for den mindre voxe noget mere end Ordinaten for den større.

Enhver af Parablens Grene bortfierner sig derfor rigtig nok stedse mere og mere fra Axelen, men denne Afvigelse bliver, naar Abscissen har samme Tilvext, stedse mindre jo større Abscissen er. Parablens Grene nærme sig saaledes mere og mere til at blive parallele med dens Axel, uden dog at det nogensinde skeer.

§. 13.

Antages Abscissen nægtende ($-x$) bliver $y^2 = -px$ og $y$ en umulig Størrelse. Parablen gaaer altsaa ikke paa den anden Side af $A$, og løber kun fort mod een Side med to Grene uden Ende.

Till. Tænke vi os to forskiellige Abscisser, $x$ og $z$, og deres tilhørende Ordinater $y$ og $u$, saa er $y^2 = px$ og $u^2 = pz$, følgelig $y^2 : u^2 = px : pz = x : z$, eller og $y : u = \sqrt{x} : \sqrt{z}$ ɔ: Abscisserne forholde sig som Qvadraterne af Ordinaterne (sunt in ratione duplicata ordinatarum)

og Ordinaterne som Qvadratrødderne af Abscisserne (sunt in ratione subduplicata abscissarum).

§. 14.

Ved Keglesnittene kaldes det Punkt i Axlen, hvis tilhørende Ordinate er saa stor som den halve Parameter, Fokus eller Brændpunkt; saaledes i Parablen Punktet $F$, naar Ordinaten $FT$ er er saa stor som den halve, Parameter.

Till. Brændepunktets Afstand fra Toppunktet i Parablen er $= \frac{1}{4}p$, thi efter Forklaringen er $FT = \frac{1}{2}p$, altsaa $FT^2 = \frac{1}{4}p^2 = px = p \times AF$, og saaledes $AF = \frac{1}{4}p$.

§. 16.

Læresæt. Ethvert Punkt i Parablen ligger saa langt fra Brændepunktet som en ret Linie der bestaaer af den til Punktet hørende Abscisse og Afstanden fra Fokus til Toppunktet.

Beviis. $M$ være et vilkaarligt Punkt i Parablen, fra Fokus trækkes Linien $FM$, saa er $FM^2 = PM^2 + PF^2$, men nu er $PM = y$, altsaa $PM^2 = y^2 = px$, og $PF = (AP - AF) = x - \frac{1}{4}p$, følgelig $PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ og $FM^2 = px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$

$= x^2$

$= x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ og $FM = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2)} = x + \frac{1}{4}p$.

Till. Herpaa grunder sig en anden og lettere Maade at tegne Parablen paa end den forhen forklarede. Man trækker Axlen og afsætter paa den anden Side af Toppunktet $A$ Linien $AL = AF$ og opretter til en vilkaarlig Abscisse $AP$ i Punktet $P$ en lodret Linie, som man fra $F$ med en Radius $LP = AL + LP = (x + \frac{1}{4}p)$ overskiærer i Punkterne $M$ og $m$ der da blive Punkter i Parablens Omkreds. Paa samme Maade findes for enhver anden Abscisse de tilhørende Punkter i Parablen, og igiennem alle disse Punkter kan, naar de ere nær nok ved hinanden, Parablen tegnes paa frie Haand.

---

## II. Om Ellipsen.

### §. 16.

Forkl. Ved en Ellipse forstaaes en krum Linie, hvor (under Forudsætning af retvinklede Coordinater), $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (hvor $a$ betegner den store Axel, og $p$ Parameteren) eller $y^2 =$

$y^2 = \left(p - \frac{px}{a}\right)x$ ɔ: Qvadratet af enhver Ordinate saa stor som en Rectangel hvis ene Side er Abscissen og den anden Parameteren formindsket ved at fradrage $\frac{px}{a}$ ɔ: en fierde Proportional-Linie til Axen, Parameteren og Abscissen.

Till. 1. Antages $y = o$, maa $x$ enten være $= o$ eller og $x = a$; thi da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, saa (naar $x = a$) er $y = ap - \frac{a^2p}{a} = ap - ap = o$; er $x = o$ er hele Udtrykket $px - \frac{px^2}{a} = o$ (da ethvert Produkt, hvor en enkelt Faktor er $= o$, er selv $o$). Er altsaa $A$ (Fig. II Tab. V) Abscissernes Begyndelsespunkt og $AB = a$, saa ligge Punkterne $A$ og $B$ baade i Axlen og i Ellipsen, ere altsaa Ellipsens Toppunkter.

Till. 2. Da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ og $y = \pm\sqrt{px - \frac{px^2}{a}}$, saa høre til enhver Abscisse $AP$ to ligestore Ordinater, men i modsat Beliggenhed som $PM$ og $Pm$.

Till. 3. Ellipsen er altsaa en i sig selv tilbagelobende krum Linie, og bliver af sin Axel deelt i to ligestore og ligedanne Dele.

Till. 4. Af den forste anforte Aeqvation for Ellipsen $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ findes, ved at multiplicere med $a$, $ay^2 = p(ax - x^2)$ og deraf Proportionen $y^2 : x(a - x) = p : a$. Antages nu $x = AP$, folgelig $PM = y$, saa er $PM^2 : AP \times PB = p : a$ ɔ: Qvadratet af enhver Ordinate forholder sig til det under Stykkerne af den store Axel indbefattede Rectangel som Parameteren forholder sig til den store Axel.

Till. 5. For to vilkaarlige Abscisser $x$ og $u$ antage man Ordinaterne $y$ og $z$, saa er $y^2 : z^2 = ax - x^2 : au - u^2 = x(a - x) : u(a - u)$. Lad $x$ være $= AP$ og $u = AQ$, saa er $PM^2 : QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$. Qvadraterne af to forskiellige Ordinater forholde sig altsaa som de under Stykkerne af den store Axel indbefattede Rectangler.

§. 17.

Forkl. Middelpunktet af den store Axel kaldes Ellipsens Centrum, og en lodret Linie $Dd$ paa Axlen igjennem dette Centrum faaer Navn af Ellipsens mindre Axel (axis conjugatus) som betegnes med $c$.

Till. 1. Antages $x = \frac{1}{2}a$, saa er (§. 16 Till. 4) $y^2 = \frac{1}{4}c^2$ (da $y = \frac{1}{2}c$) $= \frac{1}{2}ap - \frac{\frac{1}{4}a^2 p}{a}$

$= \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}ap$, følgelig $\frac{1}{2}c = \pm\frac{\sqrt{ap}}{2}$

og $c = \pm\sqrt{ap}$, følgelig $c^2 = ap$, og deraf

$a : c = c : p$, og $p = \frac{c^2}{a}$ ɔ: Ellipsens mindre Axel er en Mellemproportional-Linie imellem den store Axel og Parameteren.

Till. 2. Indsættes nu denne Værdie $\frac{c^2}{a}$

istedet for $p$ i Ligningen $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$

saa faae vi $y^2 = \frac{c^2}{a}x - \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{ac^2}{a^2}x -$

$\frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$ vi have altsaa udledet en Ligning for Ellipsen ved den lille og store Axel.

 Till.

Till. 3. Af den i forrige Tillæg fundne Ligning for Ellipsen $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$, udledes den Ligning $a^2 y^2 = c^2(ax - x^2)$ og deraf Proportionen $y^2 : (ax - x^2) = c^2 : a^2$. Lad være f. Ex. $x = AP$ og $y = PM$ saa $PM^2 : (AP \times PB) = c^2 : a^2$. Saaledes er nu fundet, at Qvadratet af enhver Ordinate forholder sig til den under Stykkerne af den store Axel indbefattede Rectangel, som Qvadratet af den mindre Axel til Qvadratet af den større.

Till. 4. Lad (Fig. V) $AN$ være et Stykke af en Cirkelbue, beskrevet fra $C$ med Radius $CA$ uden om Ellipsen $AMB$; og for en Abscisse $AP$, Ordinaten $y = PM$ og $z = PN$, saa er $PN^2 = AP \times PB$ eller $z = ax - x^2$, altsaa $y^2 : z^2 = c^2 : a^2$ og $y : z = c : a$. Saaledes er de sammenhørende Ordinater $PM$ og $PN$ i et bestandigt Forhold.

Tager man, i Følge heraf, Cirklens Ordinater $OL$ og $PN$ i et bestandigt Forhold som f. Ex. 2 : 3, Stykkerne $OP$ og $PM$ o. s. v. saa er den igiennem Endepunkterne $K$ og $M$ trukne Linie en Ellipse.

§. 18.

## §. 18.

**Opgave.** At finde en Ligning for Ellipsen, naar Abscisserne regnes fra Middelpunktet.

**Oplosn.** Lad Abscissen $CP$ være $= u$, saa er $AP = x = \frac{1}{2}a - u$; indsættes nu denne Værdie $\frac{1}{2}a - u$ i Stedet for $x$ i den forhen fundne Ligning $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2}{a^2}x^2$ (§. 17) saa faaer man $y^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{c^2u}{a} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2u}{a} - \frac{c^2u^2}{a^2}$ som forkortet giver $y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$.

**Till. 1.** Da efter denne Ligning ligestore $u$ paa begge Sider af $C$ give ligestore $y$, saa vil Ellipsen saavel af den lille Axel $Dd$ som af den store $AB$ blive deelt i to lige store Dele, altsaa af begge Axlerne blive deelt i fire ligestore Qvadranter.

**Till. 2.** Antages $u = o$, saa er $y^2 = \frac{1}{4}c^2$ eller $y = \frac{1}{2}c$; sættes derimod $u > o$ bliver $y$ stedse mindre jo større $u$ bliver. Sættes $u = \frac{1}{2}a$, følgelig $u^2 = \frac{1}{4}a^2$ bliver $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2) = o$. Antages $u > \frac{1}{2}a$ f. Ex. lad være

$u =$

$u = \frac{1}{2}a + e$, følgelig $u^2 = \frac{1}{4}a^2 + ae + e^2$; og deraf udledes $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(- ae - e^2)$ og $y$ altsaa en umulig Størrelse. Intet Punkt af Ellipsen ligger altsaa udenfor $A$ eller $B$. Hele Ellipsen ligger altsaa indenfor disse Grændser.

Till. 3. Tænke vi os den store Axel $a$ ligestor med den mindre ($a = c$) saa faae vi $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$ ɔ: Ellipsen bliver til en Cirkel, hvis Diameter er $a = c = p$ ɔ: en Ellipse hvor den største og mindste Diameter og Parameteren ere ligestore, er det samme som en Cirkel.

Till. 4. Af det forrige veed vi at $\frac{c^2}{a^2}u^2 = \frac{1}{4}c^2 - y^2$ altsaa $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2y^2}{c^2}$. Sætte vi nu $ME$ parallel med $CP$, saa at $CE = MP = y$ og $EM = CP = u$, og Abscisserne saaledes tages paa den lille Axel, saa beholder dog Ligningen med forandrede Ordinater samme Form, og det ene følger af det andet. Man maa altsaa udtrykkelig bestemme ved denne Ligning, at $a$ betyder den større og $c$ den mindre Axel, med mindre de begge ere ligestore.

Till. 5. Antages $DE = \frac{1}{2}c - y = w$ og $y = \frac{1}{2}c - w$, følgelig $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - cw + w^2$, saa faaer man (4 Till.) denne Ligning $u^2 = \frac{a^2}{c} \times w - \frac{a^2}{c^2} \times w^2$; og sættes $\frac{a^2}{c} = k$ er $u^2 = kw - \frac{kw^2}{c}$, i hvilken Ligning Abscisserne ere tagne paa den lille Axel fra Toppunktet $D$, og $k$ er Parameteren for den lille Axel.

Till. 6. Af Ligningen $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2$ (Till. 4) findes $u = a\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)}$, sættes nu $a = mc$, er $u = mc\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)} = m\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - y^2)}$. Antages nu $c = 2$, saa findes $u = m\sqrt{(1 - y^2)}$ hvor $y = CE$ kan betegne Abscissen paa den mindre Axel og $u$ betegne $EM$ Ordinaten, som er parallel med den store Axel.

Anm. Da, i Følge det forhen Forklarede, (især 4 Till.) kun Axler og Coordinater ere ombyttede, saa kan $c$ betyde den større og $a$ den mindre Axel naar vi antage $m > 1$.

Till. 7. For Cirklen, hvis Radius er $\frac{1}{2}c$, kalde man Abscissen fra Middelpunktet $u$, saa er $y^2 =$

$y^2 = \frac{c^2}{4} - u^2$ følgelig $u^2 = \frac{c^2}{4} - y^2$ eller $u = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)}$ hvilken Ligning er næsten den samme, som den i forrige Tillæg anførte, da $m$ er en uægte Brøk som ikke er meget større end een, og følgelig $u$ ikke meget forskiellig fra $mu$ som er $= a$.

§. 19.

**Opgave.** At bestemme Brændepunktet i en Ellipse.

**Opløs.** Den Brændepunktet $F$ tilhørende Ordinate $y$ er $= \frac{1}{2}p$ (§. 14) altsaa $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ eller $\left(\text{da } p = \frac{c^2}{a}\right) y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$; men efter §. 18 er $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \times CF^2$; altsaa $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \times CF^2 = \frac{c^4}{4a^2}$, følgelig $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = CF^2$ og $CF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2)} = \frac{1}{2}(a+c) \times \frac{1}{2}(a-c)$ udtrykke vi $CF$ paa en almindelig Maade ved $e$ faa er $e = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2)} = \frac{\pm\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$

Ellipsen har saaledes to Brændepunkter $F$ og $f$

begge

begge i lige Afstand fra Middelpunktet ($CF = Cf$ følgelig og $FD = fD$ (Geom. §. 37)

Till. 1. Da $FD^2 = CD^2 + CF^2$ (Geom. §. 37) men $CD = \frac{1}{2}c$ og $CF = e$, saa er $FD^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}e^2$, men nu er $e^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ (§. 19) altsaa $FD^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2$ og $FD = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a = fD$.

Anm. Er $FD = fd = \frac{1}{2}a$, saa er $FD + fd = a$ ɔ: 2 rette Linier fra Brændepunkterne til den lille Axels Endepunkt udgiøre tilsammentagne den store Axel.

Till. 2. Vil man have en Ligning fra Brændepunktet $f$, saa antages $fP = w$. Da $fP = fC + CP$ saa er $w = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} + u$ eller $w - \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} = u$ følgelig $u^2 = w^2 - w\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{4}$. Indsættes nu denne Værdie for $u^2$ i Ligningen (§. 8) faaer man $y^2 = \frac{c^2}{4a^2} + \frac{c^2\sqrt{(a^2 - c^2)}w}{a^2} - \frac{c^2w^2}{a^2}$. Den samme Ligning findes ogsaa for Brændpunktet $F$ hvor $FP = FC - CP$.

Till. 3. Ethvert af Brændepunkternes Afstand fra Toppunktet $A$ er $AF$ eller $Af = AC \mp CF = \frac{1}{2}a \mp \surd(a^2 - c^2) = \frac{a \pm \surd(a^2 - ap}{2}$

Till. 4. Antages $AF = h$ saa er (Till. 2) $2h - a = - \surd(a^2 - ap)$ altsaa naar begge Sider qvadreres $4h^2 - 4ah + a^2 = a^2 - ap$ deraf $4h^2 - 4ah = - ap$ og $p = 4h - \frac{4h^2}{a} = 4h\left(1 - \frac{h}{a}\right)$.

Nu er det bekiendt (§. 16) at $y^2 = px\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ altsaa sees nu at $y^2 = 4h\left(1 - \frac{h}{a}\right) \times x \times \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

§. 30.

Læresæt. Summen af tvende Linier $FM$ og $fM$, trukne fra begge Brændpunkter til et og samme vilkaarligt antaget Punkt i Ellipsen, er ligestor med den store Axel ɔ: $FM + fM = a$.

Beviis 1) $FM^2 = FP^2 + PM^2$ men $FP = FC - CP = e - u$ og $PM = y$ (§. 16) altsaa $FM^2 = e^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2$ men $e$ er (§. 29) $= \frac{\surd(a^2 - c^2)}{2}$

følge-

folgelig $FM^2 = \frac{a^2-c^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2} = \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{(a^2-c^2)u^2}{a^2}$. $FM$ er altsaa ligestor med Qvadrat-Roden heraf $= \frac{1}{2}a \mp \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}$; man antager her det øverste Tegn for at faae til ethvert $u$ et bekræftende $FM$; da naar $u$ tillægges den største mulige Værdie, nemlig sættes $= \frac{1}{2}a$, bliver $FM$, naar de øverste Tegn antages, bekræftende, i modsat Tilfælde benægtende; hvilket gielder endnu mere naar vi antage $u < \frac{1}{2}a$.

II) Da $fM^2 = (e+u)^2 + y^2 = \frac{a^2-c^2}{4} + u\sqrt{(a^2-c^2)} + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2}u^2 = \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$ saa er $fM = \frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}$.

III) Altsaa er $FM + fM = \frac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

Till.

Till. 1. Fra Punktet $F$ beskriver man med en Radius der falder imellem $\frac{1}{2}(a+e)$ og $(\frac{1}{2}a-e)$ $x$ imellem $AF$ og $Af$ og fra $Af$ med en Radius $a-x$ Cirkelbuer over og under $AB$, saa give deres Giennemsnitte modsatte Punkter i Ellipsen $M$ og $m$; paa samme Maade kan flere findes og Ellipsen tegnes.

Till. 2. Fastgiøres en Traad hvis Længde er $= a$ med begge Enderne i Brændpunkterne og ved en Stift strammes, at den kommer i Beliggenheden $FMf$, saa vil Stiften, ført langs med Traaden ved sin vedvarende Bevægelse beskrive Ellipsen.

Till. 3. Af Læresætningen (§. 30) veed man at $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a} = \frac{4u}{a} \times \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2} = \frac{4u}{a} \times e$. Jo mere nu $F$ og $f$ nærme sig hinanden, destomindre bliver $e$ og følgelig Differencen imellem $fM$ og $FM$ ogsaa mindre; Ellipsen nærmer sig altsaa saaledes stedse mere til en Cirkel, hvis Middelpunkt er $C$ og Radius $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(FM + fM)$. Og antages $e = o$ bliver Ellipsen fuldkommen til en Cirkel.

§. 21.

§. 21.

**Opgave.** Igiennem samme Toppunkt $A$ (Fig. V) er trukket en Ellipse $AKM$, hvis store Axel er $= a$ og en Parabel $ALN$ der har samme Parameter som Ellipsen $= p$; for een og samme Abscisse $AO = x$ Forskiellen imellem Ordinaterne $OL = z$ og $OK = y$, altsaa $OL - OK = KL$.

**Opløsn.** Efter §. 11. er $z = \sqrt{px}$ og (§. 16) $y = \sqrt{px}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ altsaa $z - y$ $= \sqrt{px}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{a}}\right)$.

Till. 1. Imedens $x$ voxer i Ellipsen saavidt det kan til det bliver $= a$, aftager bestandig $1 - \frac{x}{a}$ og følgelig voxer den ene Faktor, nemlig Størrelsen $1 - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$ og tillige den anden Faktor $\sqrt{px}$; følgelig voxer ogsaa Produktet $z - y$ i begge Linierne; er derimod $x$ meget liden i Sammenligning med $a$ da blive begge Faktorerne og følgelig Produktet $x - z$ meget lidet. Ved en Ellipse med en meget lang Stor-Axel er altsaa Buerne i Parablen og Ellipsen i samme Afstand fra det fælles Toppunkt meget lidet forskiellige fra hinanden.

Till. 2. I Ellipsen er (§. 19 Till. 3.) Brændepunktets Afstand fra Toppunktet $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ab)} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1 - \frac{b}{a})} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{(1 - \frac{b}{a})} = \frac{1}{2}a\,(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a}})$. Ved Hielp af Analysis lader nu Udtrykket $\sqrt{(1 - \frac{b}{a})}$ sig forvandle til denne Række: $1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$. Subtraheres dette fra 1 og Resten multipliceres med $\frac{1}{2}a$ saa faae vi den forhen nævnte Afstand $= \frac{1}{4}p + \frac{1}{16}\frac{p^2}{a} + \frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2} \ldots$ Men i Parablen var Brændepunktets Afstand fra Toppunktet $FA = \frac{1}{4}p$ (§. 14). Følgelig er Forskiellen imellem hiin og denne Afstand $\frac{1}{16}\frac{p^2}{a} + \frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2} \ldots\ldots$ Men denne Størrelse bliver stedse mindre jo større $a$ er i Sammenligning med $p$. Ellipsens Brændepunkt nærmer sig saaledes mere til Parablens, og kan bringes saa nær dertil som man vil, naar kun Axlen $a$ kan antages saa lang som man vil.

Till. 3. Have begge Linier samme Toppunkt og Brændepunkt, hvis Afstand vi vil antage $= h$, saa

saa er for Parablen $p$ (Parameteren) $= 4h$ (§. 14) og for Ellipsen $4h - \frac{4h^2}{a}$. Antage vi nu for samme Absciße $x$, Ordinaten i Parablen $= z$ og i Ellipsen $= y$, saa er $z = \sqrt{4hx}$ (§. 14) og $y = \sqrt{(4hx\,(1 - \frac{h}{a}) \times (1 - \frac{x}{a})}$ følgelig $z - y = 2\sqrt{hx}\,(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{a}} \times \sqrt{1 - \frac{x}{a}})$ jo større altsaa $a$ er i Sammenligning med $h$ og $x$; en desmindre Deel af $z$ er $z - y$ og desmere nærmere Punkterne i begge Linier sig hinanden, i Forhold til deres Afstand fra Axlen.

Jo mere altsaa $a$ voxer for ethvert givet $h$ og $x$, desmere nærme disse krumme Linier (Parablen og Ellipsen) sig hinanden, og vil, naar $a$ antages overmaade stor, være nær ved Toppunktet meget lidet forskiellige fra hinanden.

§. 22.

Forkl. To Ellipser siges at være ligedanne (specie cædem) naar de uforanderlige Størrelser i Ligningerne for dem begge ere proportionale.

Till. 1. Lad for en vis Ellipse de hidtil brugte Bogstaver $a$, $p$, $c$, betegne den store Axel, Parameteren og den mindre Axel; og for en ligedan Bogstaverne $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ have samme Bemærkelse: følgelig $a : \alpha = c : \gamma$ og $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$. Nu er $p = \frac{c^2}{a}$ og $\beta = \frac{\gamma}{\alpha}$ (§. 17), Deraf følgende Proportion $p : \beta = \frac{c^2}{a} : \frac{\alpha^2 c^2}{a^2 \alpha} = 1 : \frac{\alpha}{a}$ $= a : \alpha$.

Till. 2. Lad Abscisserne til denne Ellipse, regnede fra Middelpunktet, være $u$ og $t$; og de tilhørende Ordinater kaldes $y$ og $z$; fremdeles være $a : \alpha = u : t$ og følgelig $t = \frac{\alpha u}{a}$ og (Till. 1) $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$ saa er (§. 18) $z^2 = \frac{1}{4}\gamma^2$ $- \frac{\gamma t^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{a^2} \times \frac{\alpha^2 u^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2}$ $\left(\frac{1}{4} - \frac{u^2}{a}\right)$. Nu er (§. 17) $\frac{y^2}{c^2} = \frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}$ og følgelig er $z^2 = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \times \frac{y^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 y^2}{a^2}$ eller $y^2 : z^2 = a^2 : \alpha^2$, altsaa $y : z = a : \alpha$.

Till.

Till. 3. I ligedanne Ellipser ere saaledes alle bestandige Linier proportionerte, som og Ordinaterne naar de tilhørende Abscisser ere det.

Till. 3. Tænker man sig i to Parabler Abscisserne $x$ og $\nu$, Parameterne $p$ og $\pi$ i denne Proportion $p : \pi = x : \nu$, altsaa $\nu = \frac{\pi x}{p}$ saa forholde Qvadraterne af de tilhørende Ordinater $y$ og $z$ (§. 13.) sig saaledes: $y^2 : z^2 = px : \pi\nu = px : \frac{\pi^2 x}{p} = p^2 : \pi^2$, og følgelig $y : z = p : \pi$. Alle Parabler ere altsaa ligedanne Figurer.

---

## III. Om Hyperblen.

§. 23.

Med Hyperblen forstaae vi en krum Linie, hvori (under Forudsætning af retvinklede Coordinater) $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ og $a > p$. Af de her forekommende bestandige Linier $a$ og $p$ kaldes $a$ den store Axel (latus transversum) og $p$ Parameteren.

Anm. Sætte vi i den for Ellipsen fundne Ligning (§. 18) $+ \bar{a}$ i Stedet for $- \bar{a}$, saa har man Ligningen for Hyperblen. Paa Grund heraf er det, at man har anseet Ellipsen for en Hyperbel med nægtende Axel.

Till. 1. For en Ordinate $y = o$ antage vi enten $x = o$ eller $px + \frac{px^2}{a} = o$ da $px^2 = - apx$ og følgelig $x = - a$. Er altsaa $A$ Begyndelsespunktet for Abscisserne og $AB = a$, saa ligge Punkterne $A$, $B$ baade i Axlen og i Hyperblen, og ere følgelig dens Top-Punkter.

Till. 2. Da $y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}}$ saa sees at til enhver Abscisse hører to hinanden modsatte

Ordi-

Ordinater ($PM$, $Pm$). Hyperblen bliver altsaa halveret af den forlængede Axel, eller deelt i to congruente Dele.

Till. 3. For enhver bekræftende Abscisse bliver $y^2$ bekræftende, og saaledes $\sqrt{y^2}$ en mulig Størrelse der voxer i samme Forhold som $x$; Ordinaterne voxe altsaa i dette Tilfælde uden Ende med Abscisserne. Hyperblens Grene løbe, ligesom Parablens (§. 13 Till. 3), fort uden Ende, og fierne sig stedse længere fra hinanden.

Till. 4. Vi havde (§. 23) $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, deraf $y^2 = px\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{px}{a}$ $(a + x)$ tænke vi os nu $x$ nægtende, saa sees følgende:

1) For enhver nægtende Abscisse ($-x$) som falder imellem $o$ og $a$ er den første Faktor $\frac{px}{a}$ nægtende, men den anden $a + x$ bekræftende; Produktet altsaa nægtende og $y$ en umulig Størrelse; derfor gives imellem $A$ og $B$ ingen Punkter af Hyperblen.

2) For enhver nægtende Abscisse der er større end $a$ ($-x > a$) blive begge de nysnævnte Faktorer nægtende, Produktet altsaa bekræftende, og $y$ en mulig Størrelse, der voxer tilligemed $x$;

Hyperblen gaaer derfor ud fra *B*, ligesom fra *A*, med to Grene, der uden Ende fierne sig ligelangt fra hinanden, og adskilles ved den forlængede Axel.

§. 24.

Forkl. Lad Middelpunktet af den store Axel *C* kaldes Hyperblens Middelpunkt. En lodret Linie *Hh* paa Middelpunktet af denne Axel, som kan hedde $c = \sqrt{ap}$, vil vi efter Ligheden med Ellipsen kalde den lille Axel. Man antager nemlig Hyperblen for en Ellipse, hvis mindre Axel $\sqrt{-ab}$ var en umulig Størrelse.

Till. Efter det foregaaende er $c^2 = ap$ altsaa $p = \frac{a}{c}$. Indsættes denne Værdie i Hovedligning i Stedet for *p*, faae vi $y = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$, som er en Ligning for Hyperblen ved Hielp af den store og lille Axel.

§. 25.

Opgave. At finde en Ligning for Hyperblen, naar Middelpunktet antages til Abscissernes Begyndelsespunkt.

Opløsn.

Opløsn. Antage vi Absbissen $CP = u$ saa er $AP = x = u - \frac{1}{2}a$ og $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$; indsættes nu denne Værdie for $x$, faae vi $y^2 = \frac{c^2}{a}u - \frac{1}{2}c^2 + \frac{c^2}{a^2}u^2 - \frac{c^2}{a}u + \frac{1}{4}c^2$, som forkortet giver $y^2 = \frac{c^2}{a^2}u^2 - \frac{1}{4}c^2$.

Anm. Denne Ligning kan dannes af den (§. 17) for Ellipsen fundne, naar der blot sættes $-c^2$ i Stedet for $c^2$, det er $c\sqrt{-1}$ i Stedet for c.

Till. Den lodrette Linie $Hh$ deler Hyperblen i to congruente Dele, som man kalder modsatte Hyperbler, omendskiønt de egentlig kun udgiøre een Hyperbel.

## §. 26.

Opgave. At bestemme Brændepunktet $F$ i en Hyperbel.

Opløsn. For Brændepunktet $F$ er $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ (§. 14) $= \frac{c^4}{4a^2}$ . . . . . Nu er ogsaa $y^2 = \frac{c^2CF^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$; følgelig er $\frac{c^2CF^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ og $CF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}$. Antage vi

nu

nu $CF = e$ saa er $e = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$

Hyperblen har saaledes to Brændepunkter, $F$ og $f$, der begge ligge lige langt borte fra Middelpunktet.

Till. Da $AF = CF - CA$, saa er, efter det Foregaaende, $AF = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)} - a}{2}$.

§. 27.

Opgave. At bestemme Forskiellen imellem de Linier, der fra et af Brændepunkterne trækkes til et og samme Punkt i Hyperblens Omkreds.

Opløs. I) Da $FM^2 = FP^2 + PM^2$ og $FP = CP - CF = u - e = u - \frac{\sqrt{(a^2+c^2)} - a}{2}$; fremdeles $PM = y$, saa er

$$FM^2 = u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{a^2}{4} + \frac{u^2c^2}{a^2}$$

$$= \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \tfrac{1}{4}a^2.$$

$FM$ er altsaa ligestor med Qvadratroden af denne sammensatte Størrelse ɔ: $FM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \frac{1}{2}a$

naar

Naar $FM$ skal være bekræftende, da her bestandig antages at $u > \frac{1}{2}a$.

II) $fM^2 = \left(u + \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}\right)^2 + y^2$

$= u^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2}{4} + \frac{u^2c^2}{a^2}$, som

forkortet giver $fM = \frac{u\sqrt{(aa + c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$.

III) Heraf følger $fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

Till. Antager man en villkaarlig Linie $z > \frac{1}{2}a$ og tænker sig $fM = z + \frac{1}{2}a$. $FM = z - \frac{1}{2}a$, saa findes derved en Størrelse $= fM - FM$, hvorved forskiellige enkelte Punkter i Ellipsens Omkreds lader sig bestemme paa en lignende Maade med hvad der er viist ved Ellipsen og Parablen.

Anm. Man har ogsaa mekaniske Redskaber, hvorved alle tre Keglesnittene ved en fortsat Bevægelse lade sig beskrive; Indretningen og Brugen af disse grunder sig paa Egenskaben af disse Liniers Brændepunkter.

§. 28.

Opgave. Lad paa $CP$ være opreist den lodrette Linie $PR$ saaledes, at $a : c = CP : PR$

der

der forlanges at bestemme Længden af $MR = PR - PM$.

Opløsn. Lad være $CP = u$, $PM = y$, $PR = z$, saa er $z = \frac{cu}{a}$. Men $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$ (§. 27) følgelig $z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) = \frac{c^2}{4}$ og $z - y = \frac{c^2}{4(z+y)}$.

Till. Da $z + y$ bestandigt voxer naar $u$ voxer, saa maa og $z - y$ bestandig aftage i samme Forhöld, men kan dog aldrig blive $= o$, saalænge $u$, og følgelig $z + y$, er en angivelig Størrelse.

§. 29.

Forklar. Giøres $Pr = PR$ og de rette Linier $CR$ og $Cr$ trækkes og forlænges i modsat Retning til $N$ og $n$: da kaldes Linierne $nCR$ og $NCr$ (der have den Egenskab at de stedse nærme sig Hyperblen uden nogensinde at naae den) Hyperblens Asymtoter.

Anm. Parablens Sider (Grene) nærme sig stedse mere en ret Linie, der er parallel med Axlen; Hyperblens derimod nærme sig mere til de fra Axlen divergerende Asymtoter.

Till. 1. Antages $DE$ lodret paa $BA$ igiennem Punktet $A$, saa er $CA : AD = CP :$ $PR =$

$PR = a : c$, og følgelig $AD = AE = \frac{1}{2}ac$ og $CD = CE$, samt $< DCA = < ACE = \frac{1}{2} DCE$. Asymptote-Vinklen $DCE$ bliver altsaa halveret af Axlen.

Till. 2. Da Tang. $DCA = \frac{DA}{CA} = \frac{c}{a}$ følgelig en ægte Brøk, da $\frac{c}{a} < 1$. Nu er Tang. $45^\circ = 1$, altsaa $< DCE$ spids, følgelig $DCN$ stump.

Till. 3. Da $RM = \frac{c^2}{4}(z+y)$, men $Mr = z+y$, saa er $RM : Mr = \frac{c^2}{4}$, altsaa en uforanderlig Størrelse.

§. 30.

Opgave. At finde Værdien for $CQ \times QM$ naar $MQ$ er parallel med $Cr$.

Opløsn. Er $MQ \doteqdot Cr$, saa er Triangelen $RQM \sim DCE$ og begge Triangler ligebenede, nemlig ($DC = CE$; $RQ = QM$), altsaa $DE : DC = RM : RQ = Mr : CQ$, følgelig er $RQ = QM = \frac{DC}{DE} \times RM$ og

$CQ =$

$CQ = \frac{DC}{DE} \times Mr$, følgelig $CQ \times QM$ $= \frac{DC^2}{DE^2} \times RM \times Mr$. Nu er $DC^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$ og $DE^2 = c^2$, altsaa $CQ \times QM$ $= \frac{a^2 + c^2}{16}$.

Till. 1. Tænker man sig $CQ$ og $QM$ som Coordinater paa Asymptoten, og antager $CQ = p$, $QM = q$, saa er $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$, som er en Ligning for Hyperblen imellem Asymptoterne.

Till. 2. Lad $AG$ være være parallel med $CE$, saa er $CAG = ACE = ACG$ og $CG = CA$, altsaa $CG^2 = CG \times GA = \frac{a^2 + c^2}{16}$ dette Qvadrat ($\frac{1}{16}$ af Summen af begge Axlernes Qvadrater) kaldes Hyperblens Potens.

## §. 31.

Læresætn. Lad os antage at en vilkaarlig trukket ret Linie $Rr$ skiærer Hyperblens Grene i Punkterne $M$, $m$ og Asymptoterne i $R$ og $r$, saa er $RM = rm$.

Opløsn.

Opløsn. Man trækker $MQ$, $mq$ parallele med Asymptoterne, saa er $RM : MQ = Rr : rC = mR : qC$, følgelig $RM = \frac{MQ \times mR}{qC}$; og $rm : mq = rR : RC = Mr : QC$, altsaa $rm = \frac{mq \times Mr}{QC}$. Fremdeles er i Følge heraf $RM : rm = MQ \times mR \times QC : mq \times Mr \times qC$. Men nu er $MQ \times QC = mq \times qC$; følgelig $RM : rm = Mm : Mm$ og $RM = rm$.

Till. Er Asymptoternes Beliggenhed bekiendt og et Punkt $M$ i Hyperblen, da kan man finde de øvrige Punkter, naar man igiennem det givne Punkt trækker flere vilkaarlige Linier, som $RMr$ og giør $rm = RM$.

§. 32.

Opgave. Naar Asymptoternes Beliggenhed og et Punkt $M$ i Hyperblen er givet, da at finde dens Axel.

Opløsn. I) Ved Tegning. Man trækker $MQ \mp Cr$, halverer den givne Asymptote-Vinkel $QCq$ ved $CP$, giør $CG = \sqrt{(CQ \times QM)}$ som er $= \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{4}$ trækker $GA \mp Cr$, saa

er

er $CA$ den halve større og $AD$ den halve lille Axel.

II) Ved Regning. Naar $M$ er bekiendt er det tillige givet, at $CQ \times QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$ og ved Beliggenheden af Asymptoterne eller ved Asymptote-Vinklen $= 2k$ er Forholdet imellem begge Axlerne givet, da $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a \times \text{tang. } k$ eller $c = a \times \text{tang. } k$. Indsættes nu i den forrige Ligning denne Værdie i Stedet for $c$ faae vi $CQ \times QM = \frac{a^2 + a^2 \times \text{tang. } k^2}{16} = \frac{(1 + \text{tang. } k^2)a^2}{16}$ altsaa $\frac{16 \times CQ \times QM}{1 + \text{tang. } k^2} = a^2$ og $a = \frac{4\sqrt{(CQ \times QM)}}{\text{sec. } k} = \sqrt{(CQ \times QM)} \text{ cos. } k$.

Sættes derimod denne Værdie i Stedet for $a$ i Ligningen $c = a \times \text{tang. } k$, saa faae vi $c = 4\sqrt{(CQ \times QM)} \times \text{cos. } k \times \text{tang. } k = 4\sqrt{(CQ \times QM)} \times \text{cos. } k$. F. Ex.: sæt $k = 5$, $CQ = 25$, $QM = 4$.

Till. 1. Ere nu $a$ og $c$ fundne saa har man $p = \frac{c^2}{a}$.

Till.

Till. 2. Ere $a$ og $c$ givne, saa finder man af Ligningen tang. $k = \frac{c}{a}$ Vinklen $k$, og deraf Værdien for $2k$

Eller: da tang. $2k = \frac{2 \text{ tang. } k}{1 - \text{tang. } k^2}$ saa er tang. $2k = \frac{2 \times \frac{c}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \frac{2ac}{a^2 - c^2} = \frac{2ac}{(a+c) \times (a-c)}$

§. 33.

Forklar. En Hyperbel, hvis Axler ere ligestore, og følgelig ogsaa ligestore med Parameteren kaldes ligesidet eller retvinklet.

Till. 1. Da $CA = AD$, saa er $ACD = 45°$, altsaa $DCE = 90°$.

Till. 2. Da $a = c$, saa er $p = \frac{c^2}{a} = a$ og $y^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$, som er Ligningen for den ligesidede Hyperbel; hvor altsaa for alle mulige Ordinater $u$ maa antages større end $\frac{1}{2} a$.

Till. 3. Tænker man sig en Cirkel beskrevet fra $C$ med Radius $CA$, der berører Hyperblen i Toppunktet, og kalder Ordinaten $z$ der svarer til Abscissen $u$, regnet fra $C$, saa er $z^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$ og

$u^2$ og $z$ saaledes en mulig Størrelse, saalænge $u < \frac{1}{2} a$, som just er det modsatte hvad der er sagt om Hyperblen (§. 33. Till. 2).

§. 34.

Forklar. En Hyperbel, hvis Ordinate $y$ og Absbisse $v$ vare tagne paa $CH$, for hvilken man havde Ligningen $y^2 = \frac{a^2}{c^2} \times v^2 - \frac{1}{2} a^2$; og den hidtil betragtede kaldes forbundne Hyperbler (hyperbolæ conjugatæ).

Till. 1. Antages $y = o$, saa er $v = \frac{1}{2} c$, som bestemmer Afstanden fra Toppunktet til $C$.

Till. 2. Da Tang. $HCR$ = Cos. $DCA$ $= \frac{a}{c}$, saa hører til den rette Linie $CR$ Abscissen $v$, Ordinaten $z = \frac{a}{c} v$. Saaledes er $z^2 - y^2 = \frac{1}{4} a^2$ og $z - y = \frac{a^2}{4(z + y)}$, og $CR$ Asymtoten til den nye Hyperbel, og Asymtote-Vinklen $NCR$ stump.

Till. 3. Den modsatte Hyperbel eller den halve Deel deraf, falder inden for Vinklen $nCr$, og den lille Axel falder imellem Toppunkterne; men den store Axel $a$ ligger i Rummet, hvor ingen

Ordi-

Ordinater ere, som just er det modsatte af den hidtil betragtede Hyperbel.

§. 35.

Hvad hidtil er foredraget om de krumme Linier, nemlig: Parablen, Ellipsen, Hyperblen og Cirkel-Linien (hvilke almindelig ere bekiendt under Navn af Keglesnitte, da de frembringes paa en Kegles krumme Overflade, naar den i forskiellige Retninger giennemskiæres med en ret Flade) er foredraget analytisk; kortelig vil jeg nu vise hvorledes man synthetisk kan udlede de samme Ligninger ved at betragte Liniernes Beliggenhed i Keglesnittet.

Lad *ADB* (Fig. 3. Tab. VII.) være en lodret Kegle, saa fremkommer ved et Snit af en Plan parallel med Grundfladen en Cirkel; lægges Planen parallel med en af Sidefladerne frembringer Snittet en Parabel; lægges derimod den skiærende Plan saaledes, at den begynder under Toppunktet paa den ene Side af Keglen og gaaer ud paa den anden Side uden at naae Grundfladen, da er Snittet en Ellipse. Skeer Snittet derimod saaledes, at den skiærende Plan er parallel med Keglens Axel, frembringes en Hyperbel; og tænkes denne Plan forlænget i en modsat Kegle, frembringes en modsat Hyperbel.

§. 36.

## §. 36.

**Opgave.** Af Snitter i Keglen at udlede en Ligning for Parablen.

**Opløsn.** I den rette Kegle $ABC$ (Tab. VII. Fig 4) er $EKG$ en Parabel; igiennem et vilkaarligt Punkt $I$ i Linien $EH$ (Parablens Axel) forestiller man sig et Snit parallel med Grundfladen, som frembringer en Cirkel $HKF$, deri trækkes $IK$ lodret paa $HF$ og $EL$; igiennem Punktet $E$ (Parablens Toppunkt) tænkes et Cirkelsnit parallel med $HKF$, hvis Diameter er $DE$.

Nu er Linien $IK$ lodret baade paa $HF$ og $EL$, altsaa en Ordinate baade til Cirklen $HKF$ og til Parablen $EGL$. Efter den plane Geometrie er

$$IK^2 = HI \times IF$$

$$HI = DE$$

$$\triangle\ BDE \sim \triangle\ EIF, \text{ altsaa}$$

$$BD\ (BE) : DE = EI : IF$$

$$IF = \frac{DE \times EI}{BE}$$

indsættes nu i Ligningen $IK^2 = HI \times IF$, for $HI$ og $IF$ de saaledes fundne Værdier faae vi:

$$IK^2 = DE \times \frac{DE \times EI}{BE}$$

$$IK^2 = \frac{DE \times DE}{BE} \times EI$$

Kal-

Kaldes nu $IK = y$ (Ordinaten) og $\frac{DE \times DE}{BE}$ $= p$ (Parameteren, som sees at være en uforandret Linie, nemlig en tredie Proportional-Linie til $BE$ og $DE$, der blive uforandrede saalænge Parablen beholder samme Beliggenhed) og Linien $EI = x$ og disse algebraiske Udtryk indsættes i den fundne Ligning, faae vi $y^2 = px$, som just er den for Parablen forhen givne Ligning.

§. 37.

Opgave. Af Snittets Beliggenhed i Keglen at udlede en Ligning for Ellipsen.

Opløsn. I Keglen $ABC$ (Fig. 5) være $EKL$ Snittet der frembringer Ellipsen, hvis Axel bliver Linien $EL$; igiennem et vilkaarligt Punkt $I$, paa denne Axel tænkes et Cirkelsnit $NKF$ parallel med Grundfladen $AGC$, Linien $IK$ bliver da fælles baade paa Fladen af Cirkelsnittet $NKF$ og Ellipsen $LKE$. Igiennem begge Endepunkterne af Ellipsens Axel giøres Cirkelsnittene $MOE$ og $LQN$ parallele med $NKF$.

Efter Geometrien er

$$IK^2 = HI \times IF$$

nu søges andre bestemte Udtryk for $HI$ og $IF$ saaledes: $\triangle LME \sim \triangle LIN$

altsaa: $LE : EM = LI : IN$

og $IN = \frac{EM \times LI}{LE}$

$\triangle ELN \sim \triangle EIF$

altsaa: $LE : LN = IE : IF$

og $IF = \frac{LN \times IE}{LE}$

Indsættes nu i Ligningen $IK^2 = HI \times IF$ de for $HI$ og $IF$ fundne Værdier faae vi

$$IK^2 = \frac{EM \times LI}{LE} \times \frac{LN \times IE}{LE}$$

$$IK^2 = \frac{EM \times LN}{LE} \times \frac{LI \times IE}{LE}$$

Kalde vi nu $IK = y$, $LE = a$ (Ellipsens Axel) $EI = x$ (Absciße) og følgelig $LI = (a - x)$ og Udtrykket $\frac{EM \times LN}{LE} = p$ (en bestemt Linie som er en fierde Proportional-Linie til Ellipsens Axel og Diameteren af de to Cirkler, der giennemskiære Keglen ved begge Ellipsens Toppunkter) saa faae vi

$$y^2 = p \times \frac{(a - x)x}{a} = \frac{pax - px^2}{a}$$

$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ som er just den for Ellipsen tilforn anførte Ligning, hvoraf dens Egenskaber lade sig udlede, som i Forveien er forklaret.

§. 38.

**Opgave.** Af Snittenes Beliggenhed i en Kegle at udlede Ligningen for Hyperblen.

**Oplosn.** Man tænke sig den rette Kegle (Fig. 6.) *ABC* og den modsatte *NBM*. Snittet der frembringer Hyperblen være *GKDL*, der forlænget i den modsatte Kegle, som vi ligeledes kan tænke større, vilde der ogsaa frembringe en Hyperbel, som kaldes den modsatte. Igiennem et vilkaarligt Punkt i Abscisse-Linien *GL* eller den forlængede Axel *MG* tænkes et Cirkelsnit *HKFI* parallel med Grundfladen, ligeledes igiennem Axlens Endepunkter *G* og *M*, Cirkelsnittene *OEG* og *NPM* parallele med *HKF*, saa er

$$IK^2 = HI \times IF$$

Vi søge nu ligesom ved Ellipsen andre bestemte Udtryk for *HI* og *IF*, saaledes:

$$\Delta\ MOG \backsim \Delta\ MHI$$

$$\text{og } MG : GO = MI : IH$$

$$IH = \frac{GO \times MI}{MG}$$

$$\text{fremdeles } \Delta\ GIF \backsim \Delta\ GMN$$

$$\text{og } MG : MN = GI : IF$$

$$IF = \frac{MN \times GI}{MG}$$

Ind-

Indsættes nu disse Værdier i den ovenanførte Ligning $IK^2 = HI \times IF$, saa findes

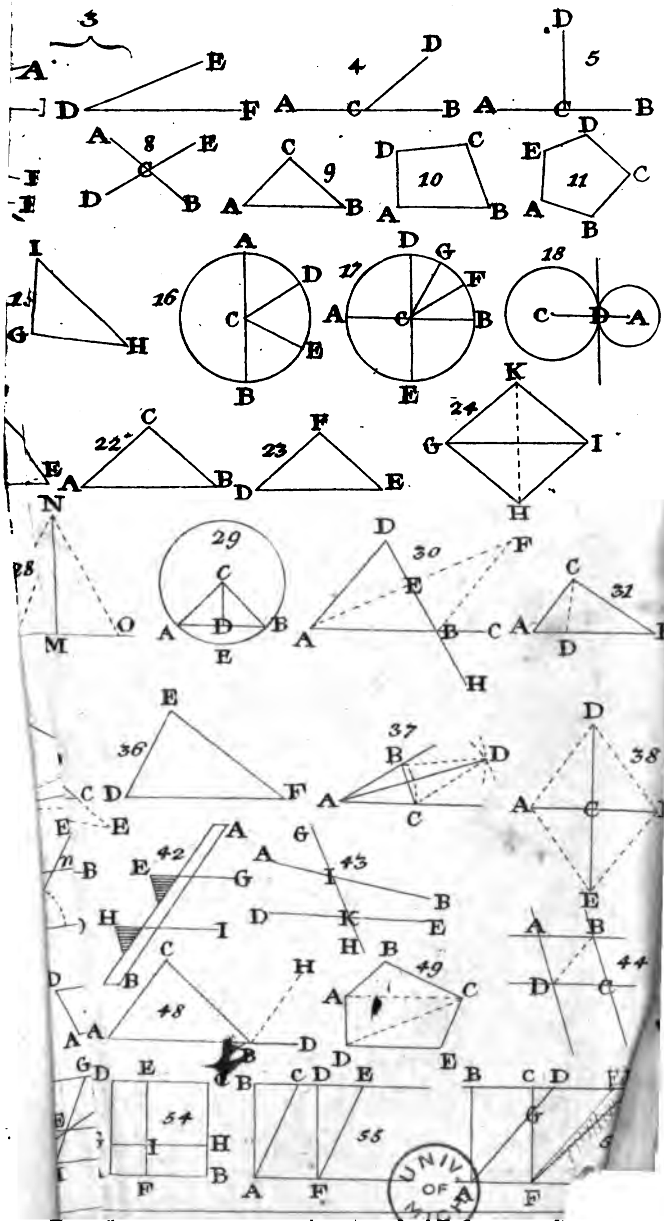
$$IK^2 = \frac{GO \times MI}{MG} \times \frac{MN \times GI}{MG}$$

$$IK^2 = \frac{GO \times MN}{MG} \times \frac{MI \times GI}{MG}$$

Linien $\frac{GO \times MN}{MG}$ er en ved Snittet bestemt Linie, som vi ligesom ved Ellipsen kalde $p$, vi have da

$$IK^2 = p \times \frac{MI \times GI}{MG}$$ sætte vi nu efter Vedtægt og det forhen anførte $GI = x$ (Abscisse) $GM = a$ (Axel) altsaa $MI = a + x$ og $IK = y$, og indsætte disse Udtryk i den fundne Ligning, saa have vi $y^2 = p \frac{(a + x)x}{a}$ $= p \times \frac{ax + x^2}{a} = \frac{pax + px^2}{a} = px + \frac{px^2}{a}$, som just er den for Hyperblen tilforn anførte Ligning, hvoraf dens Egenskaber lade sig udlede.

Anm. Fig. 7, 8, 9, Tab. VII. forestiller hvorledes Parablen, Ellipsen og Hyperblen ved Snitte igiennem en Kegle virkelig frembringes.


3
A
D E F
4
A C D B
5
A C D B
8
A E C D B
9
C A B
10
D C A B
11
E D C A B
I G H
16
A D C E B
17
D G F A C B E
18
C D A
22
C A B
23
F D E
24
K G I H
28
N M O
29
C A D B E
30
D F E A B C H
31
C A D
36
E D F
37
B D A C
38
D A C E
42
E G H I A B
43
G A I B D K E H
44
A B D C
48
C A B D H
49
B A C D E
54
E H I F B
55
C D E A F
B C D F G A F

4
F I L E D
K H F C
A G B

5
G H F
I A K B
D L E K

7
E B
D G
C

12
A F B
C
D G E

14
H L M N I

11
G B E
F
D C

13
A D B
C
E F G

18
E H A D G B E

19
B E F A D

20
D C A B

3
B D

24
E F D C A B

25
F H G E C A D B

29
F E D G C A B

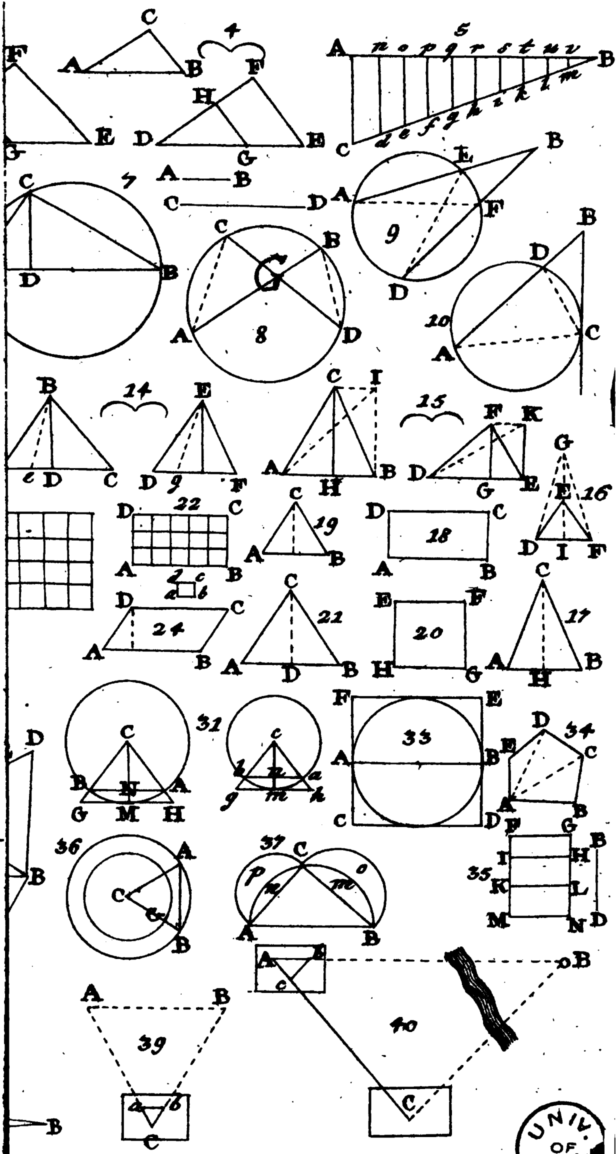
30
C D G E K H F L I A B

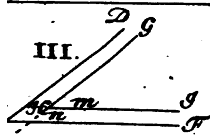
31
C F D E A H G B

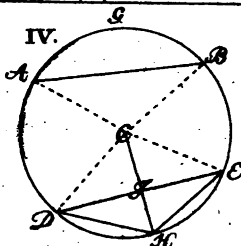
32
A D E F G B C

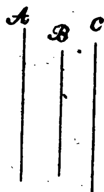
34
A D E F G C H I K

35
A C G E H D B

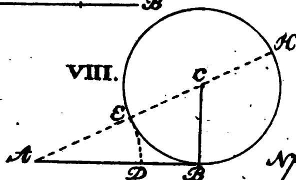


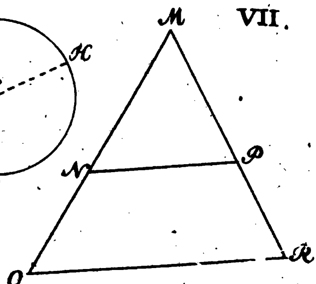

III.
D
G
m
n
I
F


IV.
G
A
B
C
E
I
D
K

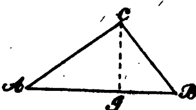

A
B
C

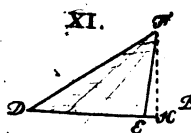

A
D
B

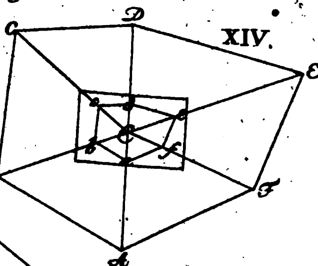

VIII.
C
K
E
A
D
B

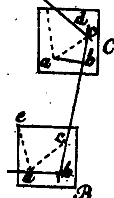

M
VII.
P
N
O
R

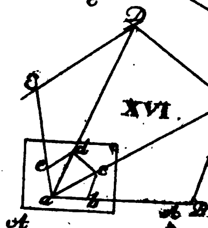

C
G
D

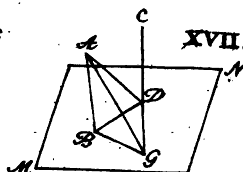

C
A
I
B

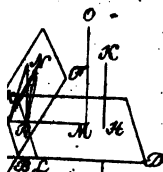

XI.
F
D
E
K

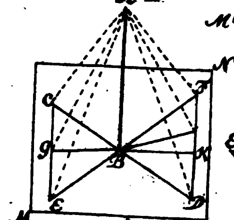

D
C
XIV.
E
B
F
A

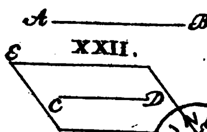

d
a
b
C
e
g
B

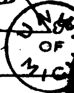

D
E
XVI.
C
d
c
a
b
A

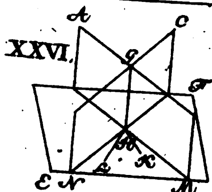

C
A
XVII.
N
D
B
G
M

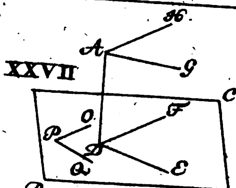

O
K
F
N
M
H
D
L
XX.

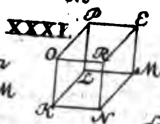

A
N
C
F
G
B
K
E
D
M
XXI.


A
B
XXII.
E
C
D

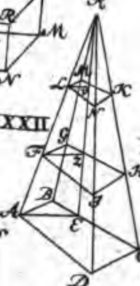

OF

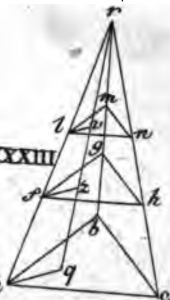


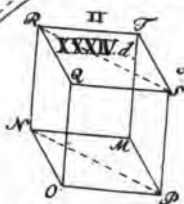




XX

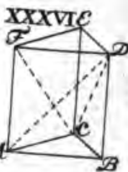


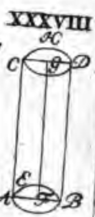



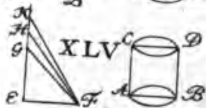




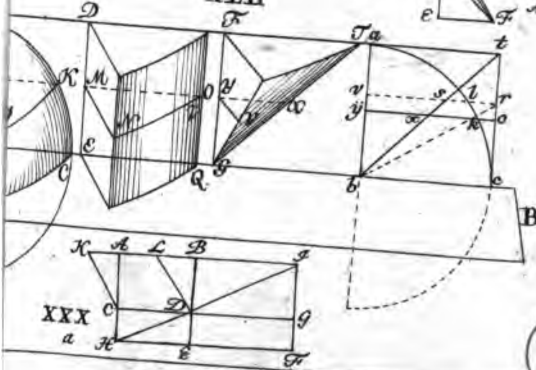


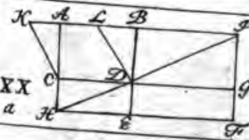

XXXV



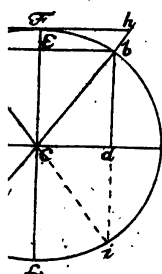



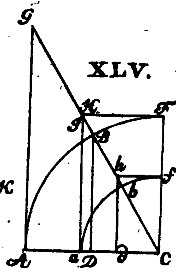

XLII

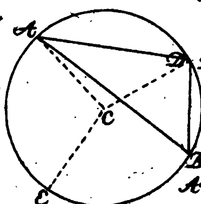


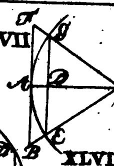



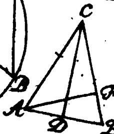

XXX
a

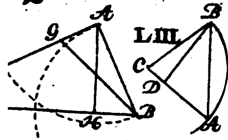

XLIV.

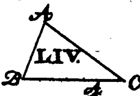

XLV.


XLVI

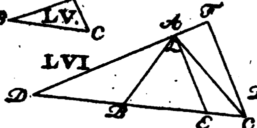

XLVII

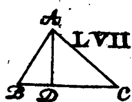


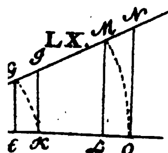

LIII.

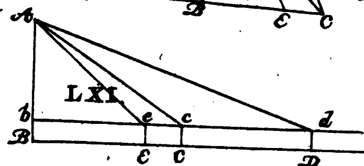

LIV.

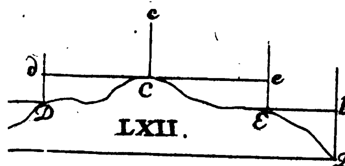

LV.

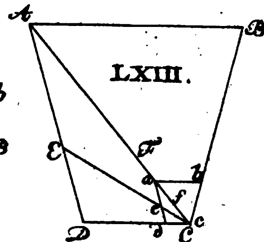

LVI.

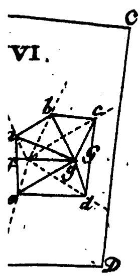

LVII.

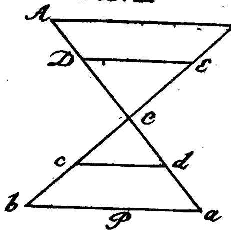

LX.

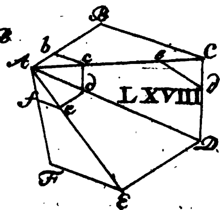

LXI.


LXII.


LXIII.




LXVII


LXVIII

2

M P N M O

3

M D L E O K A G G B K K

